Bsp. 5 Wir betrachten die Funktion

$$G: \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto G(x) := \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} - \sum_{i=1}^{n} k_i x_i ,$$

wobei die α_i, k_i positive reelle Zahlen sind.

Hintergrund: In den Wirtschaftswissenschaften stellt sich oft die Aufgabe eine Gewinnfunktion der Gestalt

$$G(x) = E(x) - K(x) = p(x) \cdot P(x) - K(x)$$

zu maximieren. Hierbei sind

- $E(x)$ die Erlösfunktion, die das Produkt aus Preisfunktion $p(x)$ und Produktionsfunktion $P(x)$ ist. P gibt an, in welcher Weise die produzierte Menge eines Gutes von den Mengen/Anzahlen der verarbeiteten Komponenten $x = (x_1, \ldots, x_n)$ abhängt. Ein häufig verwendetes Modell ist die sog. Cobb-Douglas Funktion $P(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$;
- $K(x)$ die Kostenfunktion, die vielfach als affin-linear angenommen oder approximiert werden kann.

Unter den vereinfachenden Annahmen: $p(x) \equiv 1$ (konstante Preise) und K_0 = Fixkosten $= 0$ ergibt sich die o.g. Gewinnfunktion G.

Wir zeigen: Ist $|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < 1$, so besitzt G ein isoliertes globales Maximum (und keine weiteren lokalen Extrema).

(i) Bestimmung der kritischen Stellen. Notwendig: (D50 b)

$$0 = \frac{\partial G}{\partial x_j}(x) = \frac{\alpha_j}{x_j} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}}_{P(x)} - k_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}, \text{ also}$$

$$x_j = \frac{\alpha_j}{k_j} \cdot P(x) \quad \text{oder} \quad x = \left(\frac{\alpha_1}{k_1}, \dots, \frac{\alpha_n}{k_n}\right) \cdot P(x)$$

$$\Longrightarrow \quad x_j^{\alpha_j} = \left(\frac{\alpha_j}{k_j}\right)^{\alpha_j} P(x)^{\alpha_j} \quad \Longrightarrow P(x) = \left(\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{k_j}\right)^{\alpha_j}\right) \cdot P(x)^{|\alpha|}$$

$$\Longrightarrow \quad P(x)^{1-|\alpha|} = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{k_j}\right)^{\alpha_j} \Longrightarrow P(x) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{k_j}\right)^{\frac{\alpha_j}{1-|\alpha|}}$$

Einzige <u>kritische Stelle</u> also $\underline{x_c = \left(\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{k_j}\right)^{\frac{\alpha_j}{1-|\alpha|}}\right) \left(\frac{\alpha_1}{k_1}, \dots, \frac{\alpha_n}{k_n}\right)}$

(ii) Berechnung der Hesse-Matrix:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_k \partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\alpha_j}{x_j} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}}_{P(x)} = \left(\frac{\alpha_j \alpha_k}{x_j x_k} - \frac{\alpha_j \delta_{jk}}{x_j x_k}\right) \cdot P(x)$$

so dass $-\mathrm{Hess}\, G(x) = \dots$

$$P(x) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\alpha_1 - \alpha_1^2}{x_1^2} & -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{x_1 x_2} & \cdots & -\frac{\alpha_1 \alpha_n}{x_1 x_n} \\ -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{x_1 x_2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{\alpha_1 \alpha_n}{x_1 x_n} & \cdots & & \frac{\alpha_n - \alpha_n^2}{x_n^2} \end{pmatrix}}_{H(x)}$$

Unsere Behauptung folgt, wenn wir zeigen können, dass

- $-\mathrm{Hess}\, G(x)$ positiv definit ist

$\Longleftrightarrow$ • $H(x)$ positiv definit ist (da $P(x) > 0$)

$\Longleftrightarrow$ • $\det H(x) > 0$ (nach dem Hurwitz-Krit, da alle linken oberen ~~k×k~~ k×k-Teilmatrizen von $H(x)$)

Nun enthält die j-te Zeile von $H(x)$ den Faktor $\frac{\alpha_j}{x_j}$ und die j-te Spalte von $H(x)$ ebenfalls (gilt $\forall j \in \{1, \dots, n\}$)

Also ist $\det(H(x)) = \underbrace{\prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\alpha_j}{x_j}\right)^2}_{>0} \cdot \det(H_0)$ mit

$$H_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1}-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \frac{1}{\alpha_2}-1 & -1 \cdots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & \frac{1}{\alpha_n}-1 \end{pmatrix}$$

Das VZ der Determinante (und damit die Definitheit von Hess G!) ist also unabhängig von x!

Zur Berechnung von $\det H_0$ nehmen wir die Zeilenumformungen

(1) $\to$ (1)-(2), (2) $\to$ (2)-(3), …, (n-1) $\to$ (n), (n) $\to$ (n)

vor, die die Determinante nicht beeinflussen. Also:

$\det H_0 = \det \tilde{H}_0$, wobei $\tilde{H}_0$ gegeben ist durch

$$\tilde{H}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & -\frac{1}{\alpha_2} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2} & -\frac{1}{\alpha_3} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_3} & -\frac{1}{\alpha_4} & 0 \cdots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & 0 & \frac{1}{\alpha_{n-1}} & -\frac{1}{\alpha_n} \\ -1 & -1 & \cdots & & -1 & \frac{1}{\alpha_n}-1 \end{pmatrix}$$

und man berechnet

$$\det \tilde{H}_0 = \frac{1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i}{\prod_{i=1}^{n} \alpha_i} \quad (!)$$

Induktive Begründung von (!): Ist korrekt für die 1×1- Teilmatrix unten rechts mit dem Eintrag $\frac{1}{\alpha_n}-1=\frac{1-\alpha_n}{\alpha_n}$. D50d

(Das ist unser Induktionsanfang.)

Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an: Ist H_1 die $(n-1)\times(n-1)$-Teilmatrix rechts unten, so ist

$$\det H_1 = \frac{1-\sum_{i=2}^{n}\alpha_i}{\prod_{i=2}^{n}\alpha_i}$$

Der Induktionsschritt ergibt sich dann durch Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$\det \tilde{H}_0 = \frac{1}{\alpha_1}\cdot\det H_1 + (-1)^{n-1}\cdot(-1)\cdot\underbrace{\det\begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha_2} & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & -\frac{1}{\alpha_n}\end{pmatrix}}_{(-1)^{n-1}\cdot\prod_{i=2}^{n}\frac{1}{\alpha_i}}$$

$$= \frac{1-\sum_{i=2}^{n}\alpha_i-\alpha_1}{\prod_{i=1}^{n}\alpha_i} = \frac{1-|\alpha|}{\prod_{i=1}^{n}\alpha_i}.$$

Fazit: Die Definitheit von Hess $G(x)$ ist unabhängig von x. Im Fall $|\alpha|<1$ ist Hess $G(x)$ negativ definit. Die Aussage über das isolierte globale Maximum folgt mit der Taylorformel:

$$G(x_c+h) = G(x_c) + \underbrace{\nabla G(x_c)\cdot h} + \frac{1}{2}\underbrace{\langle h, \operatorname{Hess} G(\xi)\, h\rangle}_{<0 \;\forall h\neq 0,\; h+x_c\in\mathbb{R}^n_+}$$

$$< G(x_c).$$