2. Differenzialrechnung im $\mathbb{R}^n$

2.1 Partielle Ableitungen

Hier betrachten wir Funktionen

$$f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m \qquad (\Omega \text{ offen})$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

wobei dem Fall $m = 1$ besondere Bedeutung zukommt.

Für $n = 2$ bzw. $n = 3$ schreibt man häufig:

$$f : (x, y) \longmapsto f(x, y) \qquad \text{bzw.} \qquad (x, y, z) \longmapsto f(x, y, z).$$

Def. (partielle D'barkeit in einem Punkt). Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt in $x_0 \in \Omega$ partiell d'bar nach der j-ten Komponente x_j, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{1}{t} \left(f(x_0 + t e_j) - f(x_0) \right) =: \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \qquad e_j = (\delta_{kj})_{1 \le k \le n}$$

existiert. In diesem Fall heißt $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ die partielle Ableitung von f nach x_j im Punkt x_0.

Bem. (1) Für eine $\mathbb{R}^m$-wertige Funktion existiert dieser Grenzwert genau dann, wenn er für alle Komponentenfunktionen existiert. Daher kann man sich bei vielen Fragen auf den Fall $m = 1$ beschränken.

(2) Die partielle Ableitung kann man als gewöhnliche Ableitung der Schnittfunktionen D2

$$f_{(j)} : t \mapsto f_{(j)}(t) := f(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

auffassen, wobei alle übrigen Variablen $x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$ "eingefroren" bzw. "festgehalten" werden. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n) = \frac{d f_{(j)}}{dt}(t)\Big|_{t=x_j}.$$

Daher können partielle Ableitungen nach den aus der Analysis I bekannten Rechenregeln für Ableitungen bestimmt werden.

(3) Weitere Bez. für $\frac{\partial f}{\partial x_j}$: $\partial_{x_j} f$, $\partial_j f$ (Kaballo, Königsberger), $D_{x_j} f$, $D_j f$ (Forster), f_{x_j}, etc.

(4) Die Def. der partiellen Ableitung ist bereits dann sinnvoll, wenn $t=0$ ein Häufungspunkt der Menge $\{t \in \mathbb{R} : x_0 + t e_j \in \Omega\}$ ist. Wir setzen der Einfachheit halber Ω als offen voraus, so daß diese Bedingung für jedes $x_0 \in \Omega$ erfüllt ist. (Man kann aber auch z.B. Quader jeder Art in der Definition zulassen.)

Def.: (1) Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt (D3)

partiell d'bar in $x_0 \in \Omega$, falls alle partiellen

Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)$ existieren.

(2) $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt partiell d'bar (in Ω), wenn f in jedem $x_0 \in \Omega$ partiell d'bar ist.

(3) $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt stetig partiell d'bar (in Ω), wenn f partiell d'bar ist und stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ besitzt.

Bez.: $C^1(\Omega, \mathbb{R}^m) := \{ f: \Omega \to \mathbb{R}^m, f \text{ ist stetig part. d'bar} \}$

Bsp.: (1) Die Radiusfunktion

$$r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to r(x) := |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

ist stetig partiell d'bar mit

$$\frac{\partial r}{\partial x_j}(x) = \frac{d}{dt}\left(x_1^2 + \dots + x_{j-1}^2 + t^2 + x_{j+1}^2 + \dots x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_{t=x_j}$$

$$= \frac{1}{2|x|} \cdot 2x_j = \frac{x_j}{|x|} \quad \text{(Kettenregel)}$$

(2) Ist $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ d'bar, so ist die rotationssymmetrische Funktion

$$f \circ r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(r(x)) = f(|x|)$$

partiell d'bar. Mit der Kettenregel und Bsp. (1)

erhalten wir

$$\frac{\partial f \circ r}{\partial x_j}(x) = f'(r(x)) \cdot \frac{\partial r}{\partial x_j}(x) = f'(|x|) \cdot \frac{x_j}{|x|},$$

was man meist kurz in der Form

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(|x|) = f'(|x|) \cdot \frac{x_j}{|x|}$$

notiert.

(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; (x,y) \to f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ist auf $\mathbb{R}^2$ (auch im Nullpunkt!) partiell d'bar:

(i) Für $(x,y) \neq (0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} 2x$

$$= \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \, 2y(y^2-x^2)$$

bzw. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \, 2x(x^2-y^2)$ (Symm.!)

(ii) Für $(x,y) = (0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{2x \cdot 0}{x^2+0^2} - 0\right) = 0$

und ebenso $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Wir hatten bereits gesehen, daß f im Nullpunkt unstetig ist, weil

$$\lim_{x=y \to 0} f(x,y) = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{x^2+x^2} = 1 \neq 0 = f(0,0).$$

Partielle Differenzierbarkeit impliziert also nicht die Stetigkeit einer Funktion. (Im Ggs. zum Fall $n=1$!)

Häufig werden die partiellen Ableitungen einer reellwertigen Funktion zu einem Zeilenvektor zusammengefaßt, dem sog. Gradienten.

Def. 1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: \Omega \to \mathbb{R}$ partiell d'bar. Dann heißt

$$\operatorname{grad} f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

der <u>Gradient</u> von f im Punkt $x \in \Omega$.

Bez.: $\nabla f(x) := \operatorname{grad} f(x)$ ("Nabla-Operator")

Bsp. 4: Für die Funktion $r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto r(x) := |x|$ (vgl. Bsp. (1) oben) ist $\frac{\partial r}{\partial x_j}(x) = \frac{x_j}{|x|}$, $1 \le j \le n$.

Damit ergibt sich

$$\nabla f(x) \left(= \operatorname{grad} r(x)\right) = \left(\frac{x_1}{r(x)}, \dots, \frac{x_n}{r(x)} \right) = \frac{x}{r(x)}$$ als Zeilenvektor auffassen!

oder kurz $\nabla |x| = \frac{x}{|x|}$.

Für die Verknüpfung $f \circ r$ (Bsp. (2) oben) haben wir $\nabla f(|x|) = f'(|x|) \cdot \nabla |x| = f'(|x|) \cdot \frac{x}{|x|}$.

Höhere Ableitungen:

Def.: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ partiell diff.'bar. Wir nennen f

(a) zweimal partiell diff.'bar, falls alle ersten partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ wieder partiell diff'bar sind;

(b) zweimal stetig partiell diff.bar, wenn f zweimal partiell diff.'bar ist und alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung stetig sind.

Bez.: (1) Die zweiten partiellen Ableitungen schreiben wir als $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$, $1 \le i, k \le n$.

(2) Die Gesamtheit aller zweimal stetig partiell diff'baren Funktionen $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ bildet einen $\mathbb{R}$-Vektorraum, den wir mit $C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ bezeichnen.

(3) Allgemeiner für $k \ge 2$:

$$C^k(\Omega, \mathbb{R}^m) := \{ f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m) : \frac{\partial f}{\partial x_j} \in C^{k-1}(\Omega, \mathbb{R}^m) \ \forall 1 \le j \le n \}$$

und $C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Letzteres sind die unendlich oft partielle diff.'-baren Funktionen.

(4) Physik: vektorwertige Funktionen =: Vektorfelder, im Ggs. zu Skalarfeldern $\varphi: \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$.

<u>Satz 1</u> (H. A. Schwarz): Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f: \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell diff.'bar. Dann gilt für alle $x_0 \in \Omega$ und $i, j \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) .$$

<u>Bew.</u>: Vereinfachende Annahmen:

- $x_0 = 0$ (sonst: $\tilde{f}(x) = f(x - x_0)$, Verschiebung ändert nichts an der Behauptung.)
- $n = 2$ (x_k für $k \neq i, j$ werden festgehalten.)
- $i = 1$ und $x_1 = x$, $j = 2$ und $x_2 = y$ (ggf. Umbenennung)

Dann lautet die Behauptung

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(0) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(0) .$$

Wir führen zwei Hilfsfunktionen

$$F_y(x) := f(x, y) - f(x, 0) \quad \text{und} \quad G_x(y) = f(x, y) - f(0, y)$$

ein, so daß
$$F_y(x) - F_y(0)$$
$$= f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0)$$
$$= G_x(y) - G_x(0)$$
gilt.

Die Funktionen F_y (y fest) und G_x (x fest) sind reellwertige Funktionen einer Variablen. Auf die Differenzen können wir also den MWS anwenden:

$$F_y(x) - F_y(0) = F_y'(\xi)\cdot x = \left\{\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, 0)\right\} x$$ D8

$$\underset{\text{MWS}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta)\cdot y \cdot x$$

$$G_x(y) - G_x(0) = G_x'(\tilde{\eta})\cdot y = \left\{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \tilde{\eta}) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, \tilde{\eta})\right\}\cdot y$$

$$\underset{\text{MWS}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})\cdot x \cdot y,$$

wobei in beiden Fällen $|\xi|, |\tilde{\xi}| \le |x|$, $|\eta|, |\tilde{\eta}| \le |y|$.

Division durch $x\cdot y$ ergibt

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$$

Da die zweiten Ableitungen stetig sind, folgt die Beh. im Grenzübergang $x \to 0, y \to 0$. □

Bem.: (1) Es gibt Beispiele zweimal partiell diff'barer Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für die

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0),$$

siehe Übung. Die Voraussetzung $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ ist also notwendig für diese Vertauschung.

(2) Verallgemeinerung: $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$, π eine Permutation von $\{1, \dots, k\}$. Dann gilt:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\pi(1)}} \cdots \partial x_{i_{\pi(k)}}}$$

(Beweis per Induktion über k.)