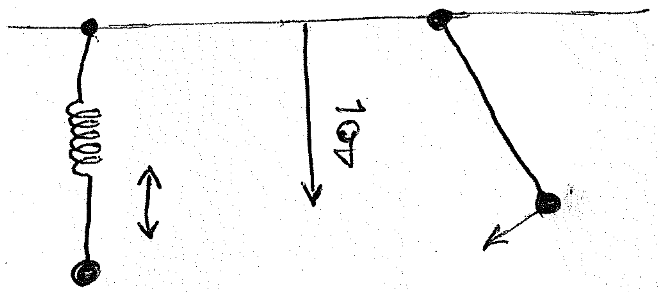
Die <u>Gleichung einer gedämpften Schwingung</u> lautet

$$y'' + \underbrace{2\mu y'}_{} + \underbrace{\omega_0^2 y}_{\text{rücktreibende Kraft}} = 0 \qquad (*)$$

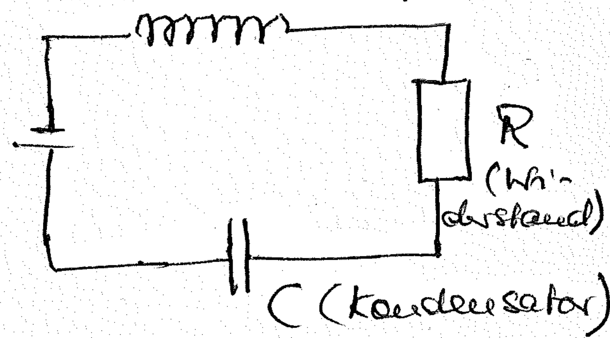
Reibungskraft,
$2\mu \geq 0$ ist der Dämpfungsfaktor.

Beschreibt eine Vielzahl physikalischer Schwingungsphänomene, z. B.:

mechanisch: Pendel



elektrisch: RCL-Glied



Die Lösungen werden <u>eindeutig bestimmt</u> durch die Dgl. und die beiden Anfangswerte $y(0) = y^{(0)}$ und $y'(0) = y^{(1)}$.
(Lehrt uns die Physik, später auch die ODE-Theorie!)

Zurückführung auf ein lineares Dgl.-System erster Ordnung (mit konstanten Koeffizienten) durch den Ansatz

$$y_1 = y' + \lambda_1 y \quad , \quad y_2 = y' + \lambda_2 y \qquad (**)$$

Wir versuchen, durch geschickte Wahl von $\lambda_{1,2}$ ein System in Diagonalgestalt für $(y_1, y_2)^T$ zu erhalten:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y'' + \lambda_1 y' \\ y'' + \lambda_2 y' \end{pmatrix} \underset{(*)}{=} \begin{pmatrix} (\lambda_1 - 2\mu) y' - \omega_0^2 y \\ (\lambda_2 - 2\mu) y' - \omega_0^2 y \end{pmatrix} \overset{!}{=} \dots$$

$$\ldots \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' + \lambda_1 y \\ y' + \lambda_2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(!) ist möglich für $\lambda_i - 2\mu = d_i \wedge -\omega_0^2 = \lambda_i d_i$,

d.h. für $\lambda_i^2 - 2\mu\lambda_i + \omega_0^2 = 0$. Zwei Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} \qquad (***)$$

erhalten wir, wenn $\mu^2 \neq \omega_0^2$ ist. In diesem Fall sind die Diagonalelemente verschieden und zwar

$$d_i = \lambda_i - 2\mu = \pm\sqrt{\mu^2 - \omega_0^2} - \mu . \qquad (****)$$

Das System $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ wird eindeutig gelöst durch

Tut.

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \exp\left(t \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{td_1} & 0 \\ 0 & e^{td_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix}$$

Jetzt berücksichtigen wir die Anfangsbedingungen

$$y(0) = y^{(0)} \quad ; \quad y'(0) = y^{(1)} ,$$

die durch unseren Ansatz (**) in

$$y_1(0) = y^{(1)} + \lambda_1 y^{(0)} , \quad y_2(0) = y^{(1)} + \lambda_2 y^{(0)}$$

übergehen. Damit:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{td_1} & 0 \\ 0 & e^{td_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{td_1}(y^{(1)} + \lambda_1 y^{(0)}) \\ e^{td_2}(y^{(1)} + \lambda_2 y^{(0)}) \end{pmatrix} \qquad (V*)$$

Jetzt stellen wir (**) um, um $y(t)$ zurückzugewinnen:

③

$$y(t) = \frac{y_1(t)-y_2(t)}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left\{ e^{t\alpha_1}(y^{(1)}+\lambda_1 y^{(0)}) - e^{t\alpha_2}(y^{(1)}+\lambda_2 y^{(0)}\right\}$$

Jetzt beachten wir

- $\lambda_1-\lambda_2 = 2\sqrt{\mu^2-\omega_0^2} =: 2\cdot\sqrt{}$
- $\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{} - \mu$, so dass

$$y(t) = \frac{e^{-t\mu}}{2\sqrt{}}\left\{ e^{t\sqrt{}}(y^{(1)}+\lambda_1 y^{(0)}) - e^{-t\sqrt{}}(y^{(1)}+\lambda_2 y^{(0)})\right\}$$

$$= \frac{e^{-t\mu}}{\sqrt{}}\left\{ \frac{e^{t\sqrt{}}-e^{-t\sqrt{}}}{2}(y^{(1)}+\mu y^{(0)}) + \sqrt{}\cdot y^{(0)}\cdot\frac{e^{t\sqrt{}}+e^{-t\sqrt{}}}{2}\right\}$$

$$= e^{-t\mu}\left\{ \frac{e^{t\sqrt{}}-e^{-t\sqrt{}}}{2\sqrt{}}(y^{(1)}+\mu y^{(0)}) + \frac{e^{t\sqrt{}}+e^{-t\sqrt{}}}{2}\cdot y^{(0)}\right\}$$

Und nun unterscheiden wir zwei Fälle:

(i) $\mu^2 > \omega_0^2 \Rightarrow \sqrt{\mu^2-\omega_0^2} =: \varrho > 0$ („Kriechfall")

$$\boxed{y(t) = e^{-t\mu}\left\{ \frac{\sinh(t\varrho)}{\varrho}(y^{(1)}+\mu y^{(0)}) + \cosh(t\varrho)\cdot y^{(0)}\right\}}$$

(ii) $\mu^2 < \omega_0^2 \Rightarrow \sqrt{\mu^2-\omega_0^2} = i\omega$ („Schwingfall")

$$\boxed{y(t) = e^{-t\mu}\left\{ \frac{\sin(t\omega)}{\omega}(y^{(1)}+\mu y^{(0)}) + \cos(\omega t)\, y^{(0)}\right.}$$

Lediglich den Übergang zwischen (i) und (ii) haben wir mit unserem ad-hoc-Verfahren noch nicht erfasst, das ist der

(iii) aperiodische Grenzfall, in dem $\underline{\mu^2 = \omega_0^2}$

Dieser Fall ist für manche technische Anwendungen (z.B. Stoßdämpfer bei Fahrzeugen) von besonderem Interesse und sei daher auch noch diskutiert. Wir modifizieren unseren Ansatz (**) zu

$$y_1 = y', \qquad y_2 = y' + \mu y \qquad (**')$$

Wir erhalten das System

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y'' \\ y'' + \mu y' \end{pmatrix} \underset{(*)}{=} \begin{pmatrix} -2\mu y' - \omega_0^2 y \\ -\mu y' - \omega_0^2 y \end{pmatrix} = -\mu \begin{pmatrix} 2y' + \mu y \\ y' + \mu y \end{pmatrix}$$

$$= -\mu \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ y' + \mu y \end{pmatrix} = -\mu \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Für $M = -\mu \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ berechnen wir unter Verwendung der Funktionalgleichung

$$e^{tM} = e^{-t\mu} \exp\left(-\mu t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = e^{-t\mu} \begin{pmatrix} 1 & -\mu t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und berücksichtigen die Anfangsbedingungen

$$y(0) = y^{(0)}, \; y'(0) = y^{(1)} \implies y_1(0) = y^{(1)}, \; y_2(0) = y^{(1)} + \mu y^{(0)}.$$

Dann wird

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = e^{tM} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = e^{-\mu t} \begin{pmatrix} 1 & -\mu t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ y^{(1)} + \mu y^{(0)} \end{pmatrix}$$

$$= e^{-\mu t} \begin{pmatrix} (1-\mu t) y^{(1)} - \mu^2 t y^{(0)} \\ y^{(1)} + \mu y^{(0)} \end{pmatrix}$$

Wir stellen (**') um und erhalten

$$y(t) = \frac{y_2(t) - y_1(t)}{\mu} = \frac{e^{-\mu t}}{\mu} \left\{ \mu t\, y^{(1)} + (\mu + \mu^2 t)\, y^{(0)} \right\}$$

$$\boxed{= e^{-\mu t} \left\{ (1 + \mu t)\, y^{(0)} + t\, y^{(1)} \right\}}$$

Damit ist das Anfangswertproblem für die Gleichung einer gedämpften Schwingung vollständig gelöst!