1.4 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

Hier betrachten wir Folgen (f_n) von Funktionen

$$f_n : X \longrightarrow Y$$

mit einem gemeinsamen Definitionsbereich X und einem gemeinsamen Zielbereich Y. Wir setzen voraus:

1. (X,d) metrisch (notwendig für die Stetigkeit, typisch: $X \subset \mathbb{R}^n$ mit der von der euklidischen Norm erzeugten Metrik);

2. $(Y, \| \ \|)$ normierter $\mathbb{K}$-VR. (metrisch für Stetigkeit, VR-Struktur, um auch Reihen untersuchen zu können; einfachster und häufigster Fall: $(Y, \| \ \|) = (\mathbb{K}, | \cdot |)$)

Wir definieren den Vektorraum

$$B(X,Y) := \{ f : X \to Y \ : \ \sup \{ \|f(x)\| : x \in X \} < \infty \}$$

aller beschränkten Y-wertigen Funktionen auf X.

Diesen versehen wir mit der Norm

$$\|f\|_\infty = \sup \{ \|f(x)\| : x \in X \}.$$

Welcher Konvergenzbegriff für Funktionenfolgen wird hierdurch induziert?

Für $f, f_n \in B(X,Y)$ gilt nun

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad \text{in } (B(X,Y), \|\ \|_\infty)$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \tag{1}$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \sup\{\|f_n(x)-f(x)\| : x\in X\} = 0 \tag{2}$$

$$\iff \forall \varepsilon>0\ \exists\ N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}, \text{ so daß } \forall n\geq N \text{ gilt} \quad \sup\{\|f_n(x)-f(x)\| : x\in X\} < \varepsilon \tag{3}$$

$$\iff \forall \varepsilon>0\ \exists\ N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}, \text{ so daß } \forall n\geq N, x\in X \text{ gilt} \quad \|f_n(x)-f(x)\| < \varepsilon. \tag{4}$$

Wenn wir die Beschränktheitsvoraussetzung an f, f_n fallen lassen und ggf. ∞ als Wert der auftretenden Suprema akzeptieren, bleiben die Äquivalenzen (1) $\iff$ ... $\iff$ (4) gültig. Damit sind wir beim Begriff der gleichm. Konvergenz von Funktionenfolgen:

Def.: Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n: X\to Y$ heißt <u>gleichmäßig</u> konvergent gegen $f: X\to Y$, wenn eine der Bedingungen (1) bis (4) erfüllt ist.

Die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge (f_n) impliziert insbesondere, dass für jedes feste $x \in X$ die Folge $(f_n(x))$ gegen $f(x)$ konvergiert:

$$\lim_{n\to\infty} \sup \{ \| f_n(x) - f(x) \| : x \in X \} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \forall x \in X : \lim_{n\to\infty} \| f_n(x) - f(x) \| = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{in } (\mathcal{Y}, \| \ \|) \qquad (5)$$

<u>Def.</u>: Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : X \to \mathcal{Y}$ heißt <u>punktweise</u> konvergent gegen $f : X \to \mathcal{Y}$, wenn die Bed. (5) erfüllt ist.

<u>Bem. u. Bsp.</u>: (i) (f_n) ist punktweise konvergent gegen $f : X \to \mathcal{Y}$, genau dann, wenn gilt

$\forall x \in X, \varepsilon > 0 \ \exists N = N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodaß $\forall n \geq N$

$$\| f_n(x) - f(x) \| < \varepsilon .$$

(Vergleiche mit (4)!)

(ii) Die glm. Konvergenz ist eine echt stärkere Eigenschaft als die punktweise. Bsp.:

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \ x \mapsto f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{array} \right\} =: f(x)$$

Also: $f_n \to f$ punktweise. Die Konvergenz ist aber nicht gleichmäßig, denn

$$\lim_{n\to\infty} \sup \{ | f_n(x) - f(x) | : x \in [0,1] \} = \lim_{n\to\infty} \sup \{ x^n : x \in [0,1) \} = 1 \neq 0 .$$

In diesem Bsp. konvergiert eine Folge stetiger Funktionen gegen eine unstetige Grenzfunktion. Das ist bei gleichmäßiger Konvergenz nicht möglich, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 1: Es sei (f_n) eine Folge (gleichmäßig) stetiger Funktionen $f_n : X \to Y$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : X \to Y$ konvergiert. Dann ist auch f (gleichmäßig) stetig.

Bew. (für glm. stetig): Wir haben für $x, y \in X$

$$f(x) - f(y) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y),$$

also mit der Dreiecksungleichung

$$\|f(x) - f(y)\| \le \|f(x) - f_n(x)\|$$
$$+ \|f_n(x) - f_n(y)\| + \|f_n(y) - f(y)\| =: \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$$

Ist jetzt $\varepsilon > 0$ vorgegeben, finden wir aufgrund der glm. Konvergenz ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \ge N$

$$\sup \{ \|f_n(z) - f(z)\| : z \in X \} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Das führt auf $\mathrm{I} < \frac{\varepsilon}{3}$ und $\mathrm{III} < \frac{\varepsilon}{3}$.

Nun fixieren wir $n \ge N$. Dann ist f_n nach Voraussetzung glm. stetig. Es gibt also ein $\delta > 0$, so daß für alle $x, y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$ gilt, daß

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Es folgt: $\forall x, y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$ ist

$$\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon,$$

und das ist die gleichmäßige Stetigkeit von f. $\square$

Empfehlung: Man modifiziere diesen Beweis so, daß die zweite Aussage des Satzes (f_n stetig u. $f_n \to f$ glm. $\Rightarrow$ f stetig) evident wird.

Folgerung: Es sei $CB(X,Y) := \{f : X \to Y;\ \|f\| < \infty,\ f \text{ stetig}\}$ der Untervektorraum von $B(X,Y) = \{f : X \to Y : \|f\| < \infty\}$, der die stetigen Funktionen enthält. Dann ist $(CB(X,Y), \| \ \|_\infty)$ abgeschlossen in $(B(X,Y), \| \ \|_\infty)$.

Dies ergibt sich aus Satz 1 zusammen mit der Charakterisierung abgeschlossener Mengen durch Folgen in Satz 2 im Abschnitt 1.3. Darüber hinaus gilt:

Satz 2: Ist $(Y, \| \ \|)$ vollständig, so sind auch $(B(X,Y), \| \ \|_\infty)$ und $(CB(X,Y), \| \ \|_\infty)$ Banachräume.

Bew.: Aufgrund der Vorbemerkung ist nur die Vollständigkeit von $(B(X,Y), \| \ \|_\infty)$ zu zeigen. Dazu sei $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $(B(X,Y), \| \ \|_\infty)$, es gelte also $\lim\limits_{n,m\to\infty} \sup\{\|f_n(x)-f_m(x)\| : x\in X\} = 0$.

1. Insbesondere ist dann $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|f_n(x)-f_m(x)\| = 0$ für jedes feste $x\in X$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Cauchy-Folge in $(Y, \| \ \|)$. Nach Voraussetzung ist $(Y, \| \ \|)$ vollständig, also existiert für jedes $x\in X$ der Grenzwert $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (in $(Y, \| \ \|)$). Dies definiert eine Abbildung $f : X \to Y$.

2. Da jede Cauchy-Folge beschränkt ist, existiert $M\in\mathbb{R}$ mit $\|f_n\|_\infty \le M \quad \forall n\in\mathbb{N}$. Insbesondere gilt für jedes $x\in X$:

$$\|f(x)\| = \|\lim_{n\to\infty} f_n(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n(x)\| \le M$$

und damit $\|f\|_\infty \le M$, d.h. $f\in B(X,Y)$.

3. Zu $\varepsilon>0$ wählen wir $N\in\mathbb{N}$ mit $\|f_n-f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n,m\ge N$. Dann folgt für $n, \cancel{m} \ge N$ und jedes $x\in X$:

$$\|f_n(x)-f(x)\| = \|f_n(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(x)\| = \lim_{m\to\infty} \|f_n(x)-f_m(x)\| < \varepsilon$$

Also auch $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n\ge N$, das heißt $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n-f\|_\infty = 0$ bzw. $f_n \to f \ (n\to\infty)$ in $(B(X,Y), \| \ \|_\infty)$.

$\square$

Für die betrachteten Funktionenfolgen haben wir angenommen, dass sie Werte in einem Vektorraum haben. Daher können wir zu einer solchen Funktionenfolge (f_n) stets die Partialsummen (141)

$$s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

bilden und die Partialsummenfolge (s_n) betrachten, die hier eine Funktionenfolge ist.

Def. Gegeben sei eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : X \to Y$. Wenn die Partialsummenfolge (s_n) in Y punktweise (bzw. gleichmäßig) konvergiert, nennen wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n := \lim_{n\to\infty} s_n$$

eine punktweise (bzw. gleichmäßig) konvergente Funktionenreihe. Darüber hinaus nennen wir $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ absolut konvergent, wenn für jedes $x \in X$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \| f_n(x) \|$ konvergiert.

Bem.: Ist Y vollständig, so impliziert die absolute Konvergenz die punktweise Konvergenz.

Ein nützliches Konvergenzkrit. liefert der folgende

<u>Satz</u> 3 (Weierstraß): Es sei $(Y, \| \ \|)$ vollständig und (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : X \to Y$, so daß

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \|_\infty < \infty .$$

Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ absolut und gleichmäßig gegen eine Funktion $F \in B(X, Y)$.

<u>Bew.</u>: $\sum_{n=0}^{\infty} \| f_n(x) \| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \|_\infty < \infty .$

Dies zeigt die absolute Konvergenz. Die Partialsummen sind beschränkt, da

$$\| S_n \|_\infty \leq \sum_{k=0}^{n} \| f_k \|_\infty < \infty, \text{ also } S_n \in B(X, Y).$$

Ferner gilt

$$\| S_n - S_m \|_\infty \leq \sum_{k=m+1}^{n} \| f_k \|_\infty \longrightarrow 0 \quad (n, m \to \infty),$$

also ist (S_n) eine Cauchy-Folge in $B(X, Y)$. $\square$

Satz 2 liefert jetzt die Beh..

Anwendungen:

1. Potenzreihen. Hier werden wir in einem ersten Schritt ein Ergebnis aus der Analysis I, nämlich die Stetigkeit von Potenzreihen auf einem anderen Weg beweisen.

Es sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann konvergiert für jedes $r \in (0, R)$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. Für ein solches r setzen wir

$$X := X_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\} = \overline{B_r(0)},$$

$$Y = \mathbb{C} \text{ und } f_n(z) = a_n z^n.$$

Dann gilt

$$\|f_n\|_\infty = \sup\{|a_n z^n| : |z| \le r\} = |a_n| r^n$$

und daher

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty.$$

Satz 3 ist anwendbar und ergibt

Satz 4: Es sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für jedes $r < R$ absolut und gleichmäßig auf $\overline{B_r(0)}$ gegen $P(z)$, und die Funktion P ist dort glm. stetig.

(Letztes gilt nach Satz 1.)

2. Potenzreihen von Matrizen:

Wieder sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Wir wollen für $n \times n$-Matrizen

$A \in M_n(\mathbb{K}) := \{ (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} : a_{ij} \in \mathbb{K} \} \cong \mathbb{K}^{n^2}$

die Potenzreihe

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$$

erklären. Dazu statten wir $M_n(\mathbb{K})$ mit der "Operatornorm"

$$\| A \| := \sup \{ |Ax| : x \in \mathbb{K}^n, |x| \le 1 \}$$

aus ($|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ die euklidische Norm).

Diese Norm ist submultiplikativ, d.h. es gilt

$$\| AB \| \le \| A \| \, \| B \| .$$

[Begründung: $|Ax| = |A \cdot \frac{x}{|x|}| \, |x| \le \|A\| \, |x|$, also auch

$|ABx| \le \|A\| \, |Bx| \le \|A\| \, \|B\| \cdot |x|$ und damit

$\| AB \| = \sup \{ |ABx| : x \in \mathbb{K}^n, |x| \le 1 \} \le \|A\| \, \|B\|$.]

Durch wiederholte Anwendung erhalten wir

$$\| A^k \| \le \| A \|^k .$$

Jetzt setzen wir für $r \in (0,R)$

$$X := X_r := \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \|A\| \le r\},$$

$$\mathcal{Y} = M_n(\mathbb{K}) \quad \text{und} \quad f_k : X \to \mathcal{Y},\ A \mapsto f_k(A) := a_k A^k$$

Ganz genau wie in 1. erhalten wir

$$\|f_k\|_\infty = \sup \{\|a_k A^k\| : \|A\| \le r\} = |a_k| r^k$$

und damit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k < \infty.$$

Wieder ist Satz 3 anwendbar und ergibt zusammen mit Satz 1:

<u>Satz 5</u>: Es sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann konvergiert für jedes $r \in (0,R)$ die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$ absolut und gleichmäßig auf $X_r = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : \|A\| \le r\}$ gegen eine stetige Funktion $P : X_r \to M_n(\mathbb{K})$, $A \mapsto P(A)$ $:= \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$.

<u>Bsp.</u>: Die Matrix-Exponentialfunktion. Für $A \in M_n(\mathbb{K})$ definieren wir $\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Bem.: (1) Da für die Exponentialreihe $R=\infty$ ist, ist die Konvergenz der Reihe für jedes $A \in M_n(\mathbb{K})$ gewährleistet.

(2) Nützliches Hilfsmittel zur Lösung von Systemen linearer Dgln. mit konstanten Koeffizienten.

(3) Die Funktionalgleichung $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ gilt auch für Matrizen, wenn diese kommutieren, d.h., wenn $AB = BA$ gilt. Insbes. ist $\exp(A)$ für jedes $A \in M_n(\mathbb{K})$ invertierbar und es gilt

$$\exp(A)^{-1} = \exp(-A).$$

3. Trigonometrische Reihen

Das sind Reihen der Form

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ikx} := \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{ikx} =: \lim_{N\to\infty} S_N(x),$$

sofern zu einer gegebenen Folge (a_k) komplexer Zahlen die Partialsummenfolge (S_N) konvergiert.

Um in diesem Zusammenhang das Weierstraß-Kriterium anzuwenden, wählen wir $(X,d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(Y, \|\ \|) = (\mathbb{C}, |\cdot|)$ und $f_k(x) = a_k \cdot e^{ikx}$.

Hierfür gilt $\|f_k\|_\infty = \sup\{|f_k(x)| : x\in\mathbb{R}\}$

$$= \sup\{|a_k e^{ikx}| : x\in\mathbb{R}\} = |a_k|.$$

Also ergibt Satz 3 das folgende hinreichende Kriterium für die Konvergenz trigonometrischer Reihen:

<u>Satz</u> 6: Ist $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k$ absolut konvergent, so konvergiert $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k e^{ikx}$ absolut und gleichmäßig gegen eine stetige, 2π-periodische Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$.

<u>Bem.</u>: Trigonometrische Reihen konvergieren häufig unter schwächeren Voraussetzungen, wenn man eine 'kleine' Menge aus dem Def.-Bereich $\mathbb{R}$ ausnimmt. Bsp.:

$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{k} e^{ikx}$ konvergiert nach dem verallgemeinerten Leibniz-Kriterium für alle $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\pi k : k\in\mathbb{Z}\}$.

(Die Konvergenz ist nicht abs. und nicht glm.!)

Setzen wir $\ell^1(\mathbb{Z}) := \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \|(a_n)\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} < \infty\}$,

wobei $\|(a_n)\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$ eine Norm ist,

so ergibt Satz 6 also eine Abbildung

$$T : \ell^1(\mathbb{Z}) \to CB(\mathbb{R},\mathbb{C}),\ (a_n) \mapsto T(a_n) := f,$$

wobei $f(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$.

Hierbei handelt es sich um eine beschränkte lineare Abbildung, da

$$\|f\|_\infty = \sup\Big\{\Big|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}\Big| : x\in\mathbb{R}\Big\} \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| = \|(a_n)\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}$$

Umgekehrt sei eine 2π-periodische Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ gegeben. Dann stellt sich die Frage: Unter welchen Voraussetzungen existiert eine Darstellung

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx} \qquad (*)$$

von f als trigonometrische Reihe? Und wie sind die Koeffizienten a_n zu bestimmen? Um die zweite Frage zu beantworten, nehmen wir an, daß eine solche Darstellung existiert. Dann multiplizieren wir (*) mit e^{-ikx} und integrieren das Ergebnis von $-\pi$ bis π. Es folgt

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i(n-k)x}\,dx$$

$$\underset{(?)}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x}\,dx = 2\pi a_k$$

Wenn wir an der Stelle (?) Summation und Integration vertauschen dürfen, müssen die a_k durch $a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$ gegeben sein.

Diese heuristische Überlegung führt zu folgender Definition:

<u>Def.</u>: Es sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ integrierbar. Dann heißen die Zahlen

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

die <u>Fourierkoeffizienten</u> von f und die Reihe

$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}$ (d.h. die Folge der Partialsummen $S_N f(x) := \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{ikx}$) die <u>Fourierreihe</u> von f.

Bem.: Vorsicht! Über die Konvergenz der Fourierreihe ist mit dieser Definition noch gar nichts ausgesagt.

An dieser Stelle unterbrechen wir die Diskussion der Anwendungen und entwickeln die Theorie etwas weiter. U.a. beschäftigen wir uns mit der Frage der Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwertbildung bei Funktionenfolgen.

Satz 7: Für $n\in\mathbb{N}$ sei $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar und es gelte $f_n\to f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit gleichmäßiger Konvergenz. Dann ist f integrierbar und es gilt (H49)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Bew.: Zum Bew. der Integrierbarkeit von f verwenden wir das folgende Kriterium (Analysis I, Abschnitt 6.2, Satz 1):

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist integrierbar genau dann, wenn gilt:

$\forall\,\varepsilon>0$ existiert eine Zerlegung $Z_\varepsilon=\{x_0,\dots,x_p\}$ von $[a,b]$, so daß $\sum_{k=1}^{p}\sup\{|f(x)-f(y)| : x_{k-1}\le x,y\le x_k\}(x_k-x_{k-1})<\varepsilon$.

Sei also $\varepsilon>0$ vorgegeben. Dann wählen wir

- $n\in\mathbb{N}$ so groß, daß $\|f-f_n\|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$,
- eine Zerlegung $Z=\{x_0,\dots,x_q\}$ von $[a,b]$, für die
$$\sum_{k=1}^{q}\sup\{|f_n(x)-f_n(y)| : x_{k-1}\le x,y\le x_k\}(x_k-x_{k-1})<\frac{\varepsilon}{2}.$$

(Die erste Wahl ist möglich aufgrund der glm. Konvergenz der f_n gegen f, die zweite nach dem genannten Kriterium aufgrund der Integrierbarkeit von f_n.)

Dann gilt für $x,y\in[x_{k-1},x_k]$:

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)|$$
$$\le 2\|f-f_n\|_\infty+\sup\{|f_n(x)-f_n(y)| : x_{k-1}\le x,y\le x_k\}$$

und damit auch

$$\sup\{|f(x)-f(y)| : x_{k-1} \le x, y \le x_k\}$$

$$\le 2\|f-f_n\|_\infty + \sup\{|f_n(x)-f_n(y)| : x_{k-1} \le x, y \le x_k\}$$

Multiplikation mit $x_k - x_{k-1}$ und Summation ergibt

$$\sum_{k=1}^{q} \sup\{|f(x)-f(y)| : x_{k-1} \le x, y \le x_k\}(x_k - x_{k-1})$$

$$\le 2(b-a)\cdot\|f-f_n\|_\infty + \sum_{k=1}^{q} \sup\{|f_n(x)-f_n(y)| : x_{k-1} \le x, y \le x_k\}(x_k - x_{k-1})$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon .$$

Damit ist die Integrierbarkeit von f gezeigt. Zum Nachweis der Identität ist lediglich zu beachten, daß

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)-f_n(x)|\,dx$$

$$\le (b-a)\,\|f-f_n\|_\infty \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty).$$ □

<u>Bem.</u>: (1) Ist die Konvergenz $f_n \to f$ lediglich punktweise, können Integration und Grenzwertbildung i. allg. <u>nicht</u> vertauscht werden: Bsp:

$$f_n(x) = n \cdot \chi_{[0,\frac{1}{n}]} \text{ für } x \in [0,1], \text{ dabei } \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ (punktweise Konvergenz),

aber $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(2) Ein entsprechender Satz gilt ebenfalls <u>nicht</u> für das uneigentliche Riemann-Integral. Auch dazu

ein Bsp.: $f_n(x) = \frac{1}{n} \cdot \chi_{(n,2n)}(x)$, $x \in [0,\infty)$.

Dann gilt zwar $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = 0$, also $f_n \to 0$ mit glm. Konvergenz. Aber es ist $\int_0^\infty f_n(x)\,dx = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

(3) Eine wirklich zufriedenstellende Aussage über die Vertauschbarkeit von Integration und Grenzwertbildung ist erst im Rahmen der Lebesgue'schen Integrationstheorie möglich, die ein wesentlicher Teil der Analysis III ist.

(4) Satz 7 gilt wortgleich für Funktionenfolgen $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$, denn eine komplexwertige Funktion f ist p.d. integrierbar genau dann, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ integrierbar sind und das Integral ist erklärt durch

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx .$$

Dies ist verallgemeinerbar für Funktionen mit Werten im $\mathbb{K}^n$ bzw. in $M_n(\mathbb{K})$ $(\cong \mathbb{K}^{n^2})$:

Def.: Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{K}^n$, $x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ heißt integrierbar, wenn alle Komponentenfunktionen $f_i : [a,b] \to \mathbb{K}$, $1 \le i \le n$, integrierbar sind. In diesem Fall setzt man

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\int_a^b f_1(x)\,dx, \dots, \int_a^b f_n(x)\,dx \right)$$

(Entsprechend für Matrixwertige Funktionen $f : [a,b] \to M_n(\mathbb{K})$)

<u>Folgerung</u> (aus dieser Definition und Satz 7):

Es sei (f_n) eine Folge von integrierbaren Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{K}^n$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{K}^n$ konvergiert. Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

(Grenzwert in $\mathbb{K}^n$ mit beliebiger Norm.)

<u>Bsp.</u>: $A \in M_n(\mathbb{K})$ sei invertierbar. Dann ist

$$\int_a^b \exp(xA)\,dx = A^{-1}(\exp(bA) - \exp(aA)),$$

denn:
$$\int_a^b \exp(xA)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^\infty \frac{(x\cdot A)^k}{k!}\,dx = \ldots$$

wobei die Reihe gleichmäßig auf $[a,b]$ konvergiert, denn $\|xA\| \leq \max(|a|,|b|)\,\|A\|$ für $x \in [a,b]$ und die Matrix-Exponentialfunktion konvergiert glm auf $\overline{B_R(0)} \subset M_n(\mathbb{K})$ für jedes $R > 0$. Also

$$\ldots = \sum_{k=0}^\infty \frac{A^k}{k!} \int_a^b x^k\,dx = A^{-1} \sum_{k=0}^\infty \frac{A^{k+1}}{(k+1)!}\, x^{k+1}\Big|_a^b$$

$$= A^{-1} \cdot \sum_{k=1}^\infty \frac{A^k}{k!}(b^k - a^k) = A^{-1} \cdot \sum_{k=0}^\infty \frac{A^k}{k!}(b^k - a^k)$$

$$= A^{-1}(\exp(bA) - \exp(aA)).$$

Nach Satz 7 sind Integration und Grenzwertbildung vertauschbar einer Funktionenfolge, wenn die Folge der Integranden auf einem kompakten Intervall gleichmäßig konvergiert. Es schließt sich die Frage an, ob auch die Ableitung mit der Limesbildung bei gleichmäßiger Konvergenz vertauscht werden kann. (HS3)

<u>Satz</u> 8: Es sei $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Es existiert eine Funktion $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, so daß $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \ \forall x \in [a,b]$ (punktweiser Limes!),

(b) es gibt eine Funktion $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, für die $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n' - g \|_\infty = 0$ (glm. Grenzwert der Ableitungen).

Dann ist f stetig d'bar mit $f'(x) = g(x) \ \forall x \in [a,b]$

Bew.: g ist stetig nach Satz 1, da alle f_n stetig sind.

Ferner $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt$

$= f(a) + \int_a^x g(t)\,dt$ (Hauptsatz + Satz 7!)

$\Longrightarrow$ f ist d'bar und es gilt $f'(x) = g(x) \ \forall x \in [a,b]$.

HS

Satz 8 läßt sich in naheliegender Weise verallgemeinern auf Funktionenfolgen (f_k) mit $\mathbb{K}^n$-wertigen Funktionen f_k.

Dazu definieren wir zunächst allgemein die D'barkeit einer vektorwertigen Funktion einer reellen Veränderlichen:

<u>Def.</u> Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $(Y, \| \ \|)$ ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Funktion

$$f : I \longrightarrow Y, \quad x \longmapsto f(x)$$

heißt differenzierbar in $x_0 \in I$, falls der Grenzwert

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{h}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) =: f'(x_0)$$

in Y existiert. In diesem Fall heißt $f'(x_0)$ die Ableitung von f in x_0.

<u>Bem.</u> (1) Der Unterschied zum reellwertigen Fall besteht also nur darin, dass der Grenzwert bezüglich der Norm in Y zu berechnen ist. Die Bedingung der Definition ist also gleichwertig mit

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \left\| \frac{1}{h}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) - f'(x_0) \right\| = 0.$$

(2) Wir wissen: Eine Folge im $\mathbb{K}^n$ konvergiert genau dann, wenn jede Komponentenfolge konvergiert. Da die Differenzierbarkeit als Grenzwert erklärt ist, gilt: Eine Funktion

$$f : I \to \mathbb{K}^n, \; x \mapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

ist differenzierbar genau dann, wenn alle Komponentenfunktionen differenzierbar sind.

(3) Für $\mathbb{K}^n$-wertige Funktionen gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung in folgender Form:

(a) Ist $f \in C([a,b], \mathbb{K}^n)$, so gilt

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt = f(x),$$

(b) für $g \in C^1([a,b], \mathbb{K}^n)$ gilt

$$\int_a^b g'(x)\,dx = g(b) - g(a)$$

Dies ergibt sich durch reine komponentenweise Auffassung von Integration bzw. Ableitung $\mathbb{K}^n$-wertiger Funktionen unmittelbar aus dem eindimensionalen Fall.

(Eine entsprechende Aussage gilt auch in ∞-dim. Banachräumen, sie ist aber wegen des fehlenden MWS nicht offensichtlich. Vgl. Kaballo, Kap 14.)

Wenn wir diese allgemeinere Form des Hauptsatzes im Beweis von Satz 8 verwenden, erhalten wir die folgende Verallgemeinerung dieses Satzes:

<u>Satz</u> 8': Es sei $f_k : [a,b] \to \mathbb{K}^n$ eine Folge stetig d'barer Funktionen mit

(a) es ex. $f : [a,b] \to \mathbb{K}^n$, so daß $f_k(x) \to f(x)$ $\forall x \in [a,b]$,

(b) es ex. $g : [a,b] \to \mathbb{K}^n$, so daß $f_k' \to g$ gleichmäßig auf $[a,b]$.

Dann ist $f \in C^1([a,b], \mathbb{K}^n)$ und es gilt $f' = g$.

Fortsetzung der Anwendungen:

(1) Potenzreihen. $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, sei gegeben mit Konvergenzradius $R > 0$. Für $r \in [0,R)$ konvergiert die Reihe absolut und glm. auf $\overline{B_r(0)}$. Sind $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben mit $a < b$ und $|a| < R$ sowie $|b| < R$, so konvergiert diese Reihe auch auf $[a,b]$ absolut und glm.

Satz 7 ergibt in dieser Situation:

$$\int_a^b P(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cancel{z}^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \Big|_a^b$$

Man sagt: <u>Potenzreihen können gliedweise integriert werden.</u> (Auch dieses Ergebnis ist bereits auf anderem Weg in Analysis I gezeigt worden.)

Bilden wir die Ableitungen

$$S_n'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

der Partialsummenfolgen, so erhalten wir wieder eine Potenzreihe

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

mit Konvergenzradius $R_Q = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n \cdot |a_n|}\right)^{-1}$.

Nun ist $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{n|a_n|} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[N]{N}\, \sqrt[n]{|a_n|}$, letzteres für alle $n \geq N$. Bilden wir den Limes superior dieser Ungleichungskette, ergibt sich

$$\frac{1}{R} \leq \frac{1}{R_Q} \leq \sqrt[N]{N} \cdot \frac{1}{R} \quad \forall\, N \in \mathbb{N}.$$

Da $\lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{N} = 1$ ist also $R = R_Q$.

In $[a,b]$ mit $|a|, |b| < R$ sind damit aber die Voraussetzungen von Satz 8 gegeben:

(a) $S_n \longrightarrow P$ (hier sogar mit glm. Konvergenz, wo pktw. genügen würde)

und (b) $S_n' \longrightarrow Q$ gleichmäßig

Dann ist $P : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig d'bar und es ist

$$P'(x) = Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

(Dies hatten wir in Ana I durch direkte Rechnung gezeigt, was etwas mühsam war.)

(2) Potenzreihen von Matrizen:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \text{ Konvergenzradius } R>0, \ r \in [0,R)$$

Für Matrizen $A \in M_n(\mathbb{K})$ konvergiert dann

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k \quad \text{auf } \overline{B_r(0)} \subset M_n(\mathbb{K})$$

absolut und glm.

Jetzt fixieren wir $M \in M_n(\mathbb{K})$ und definieren

$$f : \left[-\frac{r}{\|M\|}, \frac{r}{\|M\|}\right] \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$$

$$x \longmapsto f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k M^k.$$

Der Definitionsbereich ist so gewählt, daß $\|xM\| = |x| \, \|M\| \leq r$ ist und somit die Reihe absolut und glm. auf $\left[-\frac{r}{\|M\|}, \frac{r}{\|M\|}\right]$ konvergiert.

Dasselbe gilt für die Funktion

$$g : \left[-\frac{r}{\|M\|}, \frac{r}{\|M\|}\right] \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$$

$$x \longmapsto g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k M^k x^{k-1}$$

Somit sind die Voraussetzungen von Satz 8) hier erfüllt. Es folgt:

~~Die~~ Die Funktion $f : \left[-\frac{r}{\|M\|}, \frac{r}{\|M\|}\right] \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$ ist stetig d'bar und es gilt $f' = g$.

Also: Auch Matrixwertige Potenzreihen des obigen Typs können gliedweise differenziert werden!

Bsp.: Für eine feste Matrix $M \in M_n(\mathbb{K})$ definieren wir die Funktion

$$\exp_M : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{K}), \quad x \mapsto \exp(xM) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k M^k}{k!}.$$

Dann gilt

$$\exp_M'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} M^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \cdot M^k$$

$$= M \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} M^k = M \cdot \exp_M(x)$$

Wir sagen dazu auch: $\exp_M(x)$ löst die "Matrix-Differenzialgleichung" $A'(x) = M \cdot A(x)$.

(Hierbei: $M \in M_n(\mathbb{K})$ fest und vorgegeben und $A \in C^1(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{K}))$ die – gesuchte – Lösung dieser Dgl.)

Verlangt man zusätzlich $A(0) = Id_n$ (= $n \times n$ Einheitsmatrix), so ist $\exp_M$ hierdurch eindeutig bestimmt.

Begründung: Sei $A \in C^1(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{K}))$ gegeben mit

$$A'(x) = M A(x) \quad \text{und} \quad A(0) = Id_n$$

Man setzt

$$F(x) = \exp_M(-x) \cdot A(x)$$

und erhält "wie in Analysis I"

$$F'(x) = -M \exp_M(-x) \cdot A(x) + \exp_M(x) \cdot M \cdot A(x),$$

denn die Produktregel gilt auch für Matrixwertige

Funktionen. Beachtet man jetzt noch, daß M und $\exp_M(x)$ vertauschen, hat man

$$F'(x) \equiv 0,$$

nach dem Hauptsatz also $F(x) = \mathrm{const} = Id_n$.

Da $(\exp_M(x))^{-1} = \exp_M(-x)$, folgt $A(x) = \exp_M(x)$. □

Die Matrix-Exponentialfunktion wird verwendet um gewöhnliche lineare Dgl.-Systeme mit konstanten Koeffizienten zu lösen. Gesucht ist dabei eine Funktion $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$, die der Gleichung

$$y'(x) = M\,y(x) \quad \text{mit Anfangsbed. } y(0) = y_0$$

genügt. Hierbei sind $M \in M_n(\mathbb{K})$ und $y_0 \in \mathbb{K}^n$ fest vorgegeben. Ausgeschrieben:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}}_{=\, y'(x)} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}}_{\substack{=\, M,\ \text{unabhängig von } x, \\ \text{daher: „mit Konstanten} \\ \text{Koeffizienten"}}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}}_{=\, y(x)}$$

und die Anfangsbedingung lautet

$$(y_1(0), \dots, y_n(0))^t = \underbrace{(y_{0,1}, \dots, y_{0,n})^t}_{y_0^t \text{, wird vorgegeben.}}$$

Die Überlegungen in diesem Bsp. können wir im folgenden Satz zusammenfassen:

<u>Satz</u> 9: Gegeben seien $M \in M_n(\mathbb{K})$ und $y_0 \in \mathbb{K}^n$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y'(x) = M y(x), \qquad y(0) = y_0$$

genau eine Lösung $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$. Diese ist gegeben durch $y(x) = \exp_M(x) y_0$.

<u>Bem.</u>: Dass hierdurch eine Lösung gegeben ist, folgt aus den Aussagen über $\exp_M$. Damit ist die Existenz klar. Die Eindeutigkeit sieht man ein wie in der obigen "Begründung".

(3) Fourierreihen. Wir wissen

(a) Ist $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ integrierbar mit Fourierkoeffizienten $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$, so daß $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)| < \infty$, dann existiert eine 2π-periodische Funktion $g \in C(\mathbb{R},\mathbb{C})$ so daß

$$g(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{|k|\leq N} \hat{f}(k) e^{ikx} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx},$$

und zwar mit gleichmäßiger Konvergenz. (Satz 6)

(b) Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz gilt

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\ell) e^{i(\ell-k)x} dx$$

$$\text{Satz 7} \longrightarrow = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\ell) \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\ell-k)x} dx = \hat{f}(k)$$

<u>Frage</u>: Konvergiert die Fourierreihe von f, d.h.

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

tatsächlich gegen f? Gilt also mit den obigen Bezeichnungen $\hat{f}(k) = \hat{g}(k) \; \forall k\in\mathbb{Z} \Longrightarrow f(x) = g(x)$? Bzw., wenn wir die Differenz $h = f - g$ betrachten, gilt $\hat{h}(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow h(x) = 0$?

Dies ist ohne weitere Voraussetzungen nicht zu erwarten. Z.B. sei $M = \{x_1, \dots, x_K\} \subset [-\pi,\pi]$ eine endliche Menge und $h = \chi_M$. Dann ist

$$\hat{h}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi_M(x)\, e^{-ikx}\, dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

obwohl h nicht identisch verschwindet. Setzen wir jedoch die Stetigkeit von h voraus, erhalten wir tatsächlich die erwartete Eindeutigkeitsaussage.

<u>Lemma</u>: Es sei $h: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, 2π-periodisch, und für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gelte $\hat{h}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) e^{-ikx} dx = 0$. Dann ist $h(x) = 0$. $\forall x \in \mathbb{R}$.

<u>Bew.</u>: Wir nehmen o.E. h reellwertig an.

Wenn die Schlußfolgerung falsch ist, existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $h(x_0) \neq 0$. Wir nehmen der Einfachheit halber $x_0 = 0$ und $h(x_0) > 0$ an und führen dies zu einem Widerspruch.

Wir wählen $\delta > 0$, so daß $h(x) \geq \frac{h(0)}{2}$ für alle $x \in [-\delta, \delta]$ (möglich aufgrund der Stetigkeit von h!) und $\varepsilon = 1 - \cos(\delta) > 0$.

Dann ist $I_n := \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \left(\cos(x) + \varepsilon\right)^n dx = 0$,

denn $(\cos(x) + \varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^{n-k} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^k$

ist ein trigonometrisches Polynom, und es gilt $\hat{h}(k) = 0$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Andererseits ist

$$I_n = \int\limits_{|x|\le \frac{\delta}{2}} + \int\limits_{\frac{\delta}{2}\le |x|\le \delta} + \int\limits_{\delta \le |x|} h(x)(\cos(x)+\varepsilon)^n\,dx$$

$$=: I + II + III$$

Nun ist für $|x| \ge \delta$ $|\cos(x)+\varepsilon| \le 1$ und daher

$$III \ge -2\pi \|h\|_\infty ;$$

$$II \ge 0 \text{ , denn für } \frac{\delta}{2} \le |x| \le \delta \text{ ist } h(x) \ge \frac{h(0)}{2}$$

und $\cos(x)+\varepsilon \ge 1$;

und schließlich

$$I = \int\limits_{|x|\le\frac{\delta}{2}} h(x)\,(\cos(x)+\varepsilon)^n\,dx$$

$$\ge \delta \cdot \frac{h(0)}{2}\underbrace{(\cos(\tfrac{\delta}{2})+\varepsilon)}_{>1}{}^n .$$ Folglich

$$I_n \ge \delta\,\frac{h(0)}{2}\,(\cos(\tfrac{\delta}{2})+\varepsilon)^n - 2\pi\|h\|_\infty \longrightarrow \infty,$$

ein Widerspruch zu $I_n = 0$. $\square$

Die Zusammenfassung unserer Ergebnisse ergibt:

Satz 10: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig und 2π-periodisch, so daß $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < \infty$ ist. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)\,e^{inx}$$

und die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.