1.2 Offene und abgeschlossene Mengen

(Topologie metrischer Räume)

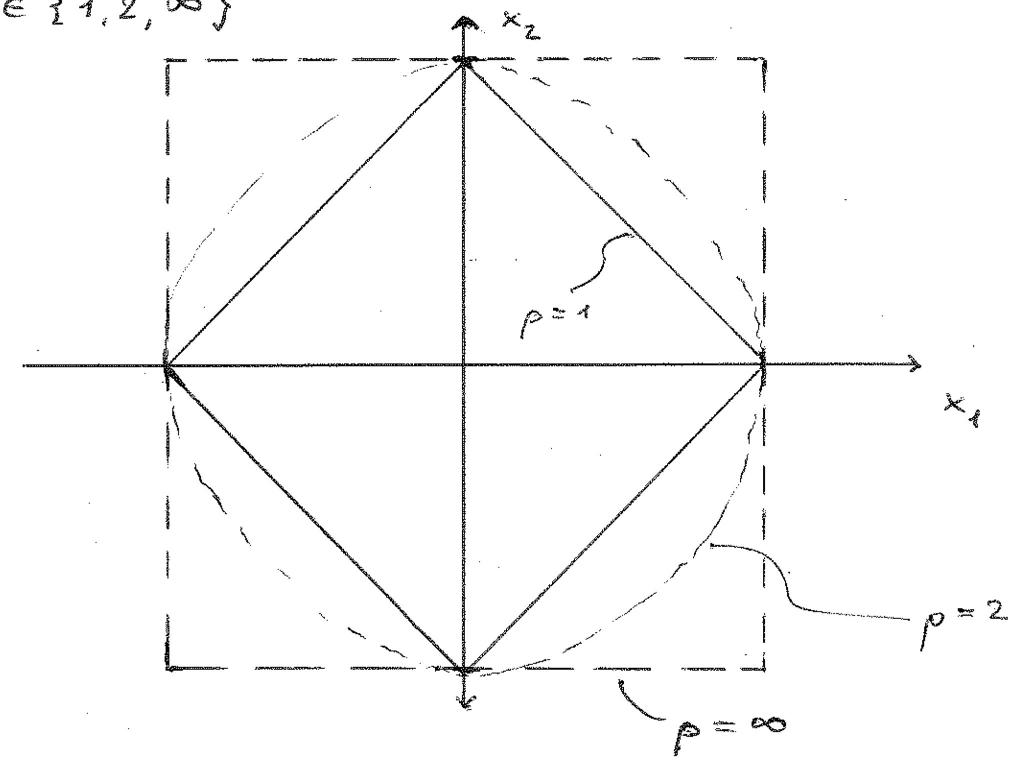
Def. In einem metrischen Raum (X,d) heißt

$$B_r(a) := \{x \in X : d(x,a) < r\}$$

die <u>offene Kugel</u> vom Radius $r>0$ um $a \in X$.

Bsp. $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ bezüglich der Metriken $d_p(x,y) := \|x-y\|_p$,

$p \in \{1, 2, \infty\}$



Man kann zumindest erahnen, wie die Eins-Kugel für $p \in (1,2)$ bzw. $p \in (2,\infty)$ im $\mathbb{R}^2$ aussieht.

Def.: In einem metrischen Raum (X,d) heißt $U \subset X$ eine <u>Umgebung</u> von $x \in U$, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß $B_\varepsilon(x) \subset U$.

In jedem metrischen Raum gilt die folgende – einfache aber wichtige – Trennungseigenschaft:

<u>Satz 1</u> Es seien (X,d) ein metrischer Raum, $x, y \in X$ und $x \neq y$. Dann gibt es Umgebungen U_x von x und U_y von y, so daß $U_x \cap U_y = \emptyset$ (disjunkte Umgebungen).

<u>Beweis</u>: $\varepsilon := \frac{1}{2} d(x,y) (>0)$, $U_x = B_\varepsilon(x)$, $U_y = B_\varepsilon(y)$.
Dann ist für $y' \in U_y$ $d(x,y') \geq d(x,y) - d(y,y') > 2\varepsilon - \varepsilon$, also $y' \notin U_x$. Das bedeutet $U_x \cap U_y = \emptyset$. $\square$

<u>Bem.</u> Diese Eigenschaft wird als "Hausdorff'sche Trennungseigenschaft" bezeichnet. Sie ist Voraussetzung für die Eindeutigkeit von Grenzwerten.

<u>Def.</u>: Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge

- $U \subset X$ heißt <u>offen</u>, falls zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so daß $B_\varepsilon(x) \subset U$,
- $A \subset X$ heißt <u>abgeschlossen</u>, falls $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$ offen ist.

<u>Bem.</u>: Eine offene Menge ist Umgebung jedes ihrer Elemente.

Es gibt viele Mengen, die weder offen, noch abgeschlossen sind. $\emptyset$ und X sind sowohl offen als auch abgeschlossen (denn: $\emptyset^c = X$ und für $U = \emptyset, X$ ist die definierende Eigenschaft von "offen" trivialerweise erfüllt!).

Bsp (1) Die offene Kugel $B_r(a)$ ist offen.

Zu $x_0 \in B_r(a)$ wählen wir $\varepsilon = r - d(x_0, a)$. Dann ist für $x \in B_\varepsilon(x_0)$: $d(x,a) \leq d(x,x_0) + d(x_0,a) < r$.

ggf. Skizze für $\mathbb{R}^2$ mit Standardmetrik.

(2) Das Kugeläußere $\{x : d(x,a) > r\}$ ist offen.

Zu x_0 mit $d(x_0, a) > r$ wählt man $\varepsilon = d(x_0, a) - r$.

Dann ist für $x \in B_\varepsilon(x_0)$ tatsächlich auch

$$d(x,a) \geq d(x_0, a) - d(x, x_0) > d(x_0, a) - \varepsilon = r.$$

Als Folgerung ergibt sich:

$\overline{B_r(a)} := \{x \in X : d(x,a) \leq r\}$ ist als Komplement des Kugeläußeren abgeschlossen. Wir nennen $\overline{B_r(a)}$ dementsprechend die abgeschlossene Kugel vom Radius r um a.

(Weitere Bsp. im Tut. oder Ü.)

Können verschiedene Metriken dasselbe System offener Mengen erzeugen?

Def.: Zwei Normen $\| \ \|_1$ und $\| \ \|_2$ auf einem VR X heißen äquivalent, wenn Konstanten c und C existieren mit

$$c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1.$$

Bem. (ohne Beweis) Auf $\mathbb{K}^n$ sind alle Normen äquivalent. Für die p-Normen: Übung, allgemeiner Fall: Einführung FA.

M13

Satz 2: Es seien X ein Vektorraum und $d_{1,2}$ Metriken auf X, die von äquivalenten Normen $\| \; \|_{1,2}$ induziert sind. Dann sind dieselben Mengen offen bezüglich d_1 wie bezüglich d_2.

Bew.: Sei U offen bezügl. d_1, $x_0 \in U$. Dann ex. $\varepsilon_1 > 0$,

so daß $\quad B_{\varepsilon_1}(x_0) = \{x \in X : d_1(x, x_0) < \varepsilon_1\} \subset U$.

Nun sei entsprechend der Vor.

$$d_1(x,y) = \|x-y\|_1 \leq \frac{1}{C}\|x-y\|_2 = \frac{1}{C} d_2(x,y).$$

Dann setzen wir $\varepsilon_2 = C\varepsilon_1$ und erhalten für

$$x \in \tilde{B}_{\varepsilon_2}(x_0) := \{x \in X : d_2(x,x_0) < \varepsilon_2\}, \text{ daß}$$

$$d_1(x,x_0) \leq \frac{1}{C} d_2(x,x_0) < \frac{\varepsilon_2}{C} = \varepsilon_1, \text{ also } x \in B_{\varepsilon_1}(x_0) \subset U.$$

Damit ist U also auch offen bezügl. d_2. Umgekehrt entsprechend. $\square$

Der nächste Satz charakterisiert das System offener Mengen, welches von einer Metrik erzeugt wird:

Satz 3: Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gelten:

(T1) $\emptyset$ und X sind offen.

(T2) U_i offen für $i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i$ offen

(T3) U, V offen $\Rightarrow U \cap V$ offen.

Bew.: (T1) bereits gezeigt.

(T2) $x \in \bigcup_{i \in I} U_i \Rightarrow \exists\, i_0$, s.d. $x \in U_{i_0}$ und U_{i_0} offen

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Also: $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

(T3) $x \in U \cap V \Rightarrow \exists\, \varepsilon_{1,2} > 0$ mit $B_{\varepsilon_1}(x) \subset U$ und $B_{\varepsilon_2}(x) \subset V$

$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \subset U \cap V$ für $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Also: $U \cap V$ offen. □

Bem.: Wiederholte Anwendung von (T3) ergibt: Endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen. Dies gilt i. allg. nicht mehr für unendliche Durchschnitte. Bsp.: $U_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$. U_n offen $\forall n \in \mathbb{N}$.

Aber: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{0\}$ ist nicht offen.

Mengensysteme, die den Bedingungen (T1) bis (T3) genügen, sind von besonderer Bedeutung. Sie werden als Topologie bezeichnet.

Def.: Gegeben sei eine Menge X.

1. Ein Mengensystem $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ heißt eine Topologie, wenn gilt
   (T1) $\emptyset, X \in \tau$,
   (T2) $U_i \in \tau,\ i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$,
   (T3) $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$.
2. Die Elemente von τ werden als offene Mengen bezeichnet. Ihre Komplemente heißen abgeschlossen.

3. Ein Paar (X,τ) bestehend aus einer Menge X (H15)
und einer Topologie $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ wird als <u>topologischer Raum</u> bezeichnet.

<u>Bsp.</u>: Einige Topologien auf $\mathbb{R}^n$, angeordnet von fein nach grob:

(1) τ_1 sei die von der trivialen Metrik erzeugte Topologie ($d_1(x,y) = \begin{cases} 0 & : x=y \\ 1 & : x \neq y \end{cases}$). Dann ist $\tau_1 = \mathcal{P}(X)$, denn: Ist $x_0 \in \mathbb{R}^n$, so ist $\{x_0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : d_1(x,x_0) < 1\}$ eine offene Menge. Nach (T2) ist jede Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ bezüglich dieser Metrik offen. Also $\tau_1 = \mathcal{P}(X)$ wie behauptet.

Bemerkenswert: Bezüglich dieser Metrik ist jede Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ sowohl offen, als auch abgeschlossen!

(2) Die von der Standardmetrik

$$d(x,y) = |x-y| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

erzeugte Topologie nennen wir τ. Wenn wir – ohne weiteren Zusatz – von den offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$ sprechen, meinen wir ihre Elemente. τ ist <u>gröber</u> als τ_1, denn es gibt eine Vielzahl von Mengen, z.B. alle endlichen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die nicht in τ liegen.

(3) $\tau_\infty := \{\emptyset, \mathbb{R}^n\}$ ist die gröbste Topologie, die wir auf $\mathbb{R}^n$ definieren können. Sie wird nicht von einer Metrik erzeugt, da für sie die Hausdorff'sche Trennungseigenschaft nicht gilt.

Def.: Es sei (X,τ) ein topologischer Raum und $M \subset X$ eine Teilmenge. Dann heißen:

(1) $M^\circ := \bigcup\limits_{\substack{U \subset M \\ U \in \tau}} U$ der offene Kern von M.

Die Elemente von M° nennen wir die inneren Punkte von M.

(2) $\overline{M} := \bigcap\limits_{\substack{M \subset A \\ A^c \in \tau}} A$ die abgeschlossene Hülle von M

(3) $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$ den Rand von M. Seine Elemente heißen Randpunkte.

Eine typische Aufgabe in diesem Zusammenhang ist die folgende. Gegeben sei ein topologischer Raum (X,τ) und eine Teilmenge $M \subset X$. Zu bestimmen sind M°, $\overline{M}$ und ∂M. Der folgende Satz gibt hierzu einige Hilfestellungen. Er wird für allgemeine Topologien formuliert und bewiesen, auch wenn wir uns in den Anwendungen auf den $\mathbb{R}^n$ mit der Standardtopologie beschränken.

Satz 4. Es sei (X,τ) ein topologischer Raum mit Teilmengen $M, M_1, M_2 \subset X$. Dann gelten:

(1) $M_1 \subset M_2 \Rightarrow \mathring{M}_1 \subset \mathring{M}_2$ und $\overline{M_1} \subset \overline{M_2}$,

(2) $(\overline{M})^c = (M^c)^\circ$ und $(\mathring{M})^c = \overline{(M^c)}$,

(3) M ist offen $\Leftrightarrow M = \mathring{M}$

(4) M ist abgeschlossen $\Leftrightarrow M = \overline{M}$

(5) $\partial M = \overline{M} \cap \overline{(M^c)} = \partial(M^c)$ und ∂M ist abgeschlossen.

(6) $\overline{M} = M \cup \partial M$, $\mathring{M} = M \setminus \partial M$

(7) $x \in \partial M \Leftrightarrow$ Für jede offene Umgebung V von x gilt $V \cap M \neq \emptyset \neq V \cap M^c$ („Randpunkteigenschaft").

Beweis: (1) $M_1 \subset M_2 \Rightarrow \{U : U \in \tau, U \subset M_1\} \subset \{U : U \in \tau, U \subset M_2\}$

$$\Rightarrow \bigcup_{\substack{U \in \tau \\ U \subset M_1}} U \subset \bigcup_{\substack{U \in \tau \\ U \subset M_2}} U, \text{ d.h. } \mathring{M}_1 \subset \mathring{M}_2 .$$

$M_1 \subset M_2 \Rightarrow \{A : A^c \in \tau, M_1 \subset A\} \supset \{A : A^c \in \tau, M_2 \subset A\}$

$$\Rightarrow \bigcap_{\substack{A^c \in \tau \\ M_1 \subset A}} A \subset \bigcap_{\substack{A^c \in \tau \\ M_2 \subset A}} A, \text{ d.h. } \overline{M_1} \subset \overline{M_2} .$$

(2) $$(\overline{M})^c = \Big(\bigcap_{\substack{A^c \in \tau \\ M \subset A}} A\Big)^c = \bigcup_{\substack{A^c \in \tau \\ M \subset A}} A^c = \bigcup_{\substack{U \in \tau \\ U \subset M^c}} U = (M^c)^\circ ,$$

$$(M^\circ)^c = \Big(\bigcup_{\substack{U \in \tau \\ U \subset M}} U\Big)^c = \bigcap_{\substack{U \in \tau \\ U \in M}} U^c = \bigcap_{\substack{A^c \in \tau \\ M^c \subset A}} A = \overline{(M^c)}$$

(3) M° ist offen als Vereinigung offener Mengen (T2).

Dies zeigt "$\Leftarrow$". Umgekehrt: Ist M offen, so gilt

$$M \subset \bigcup_{\substack{U\in\tau \\ U\subset M}} U = \mathring{M} \subset M, \text{ also } M = \mathring{M}.$$

(4) M abgeschlossen $\Leftrightarrow$ M^c offen $\underset{(3)}{\Leftrightarrow}$ $M^c = (M^c)^\circ$

$$\underset{(2)}{\Leftrightarrow} M^c = (\overline{M})^c \underset{c}{\Leftrightarrow} M = \overline{M}$$

(5) $\partial M = \overline{M}\setminus M^\circ = \overline{M}\cap (M^\circ)^c \underset{(2)}{=} \overline{M}\cap\overline{(M^c)} = \overline{(M^c)}\cap \overline{M} = \partial(M^c)$

gerade gezeigt.

$$(\partial M)^c = (\overline{M}\cap\overline{(M^c)})^c = (\overline{M})^c \cup \overline{(M^c)}^c$$

$= (M^c)^\circ \cup M^\circ$ ist offen, also ∂M abgeschlossen

(6) $M\cup\partial M = M\cup(\overline{M}\cap\overline{(M^c)}) = \underbrace{(M\cup\overline{M})}_{\overline{M}} \cap \underbrace{(M\cup\overline{M^c})}_{=X} = \overline{M}$

$$M\setminus\partial M = M\cap(\partial M)^c = M\cap(M^\circ\cup(M^c)^\circ) = \underbrace{(M\cap\mathring{M})}_{=\mathring{M}} \cup \underbrace{M\cap(M^c)^\circ}_{=\emptyset} = \mathring{M}$$

(7) "$\Rightarrow$" Sei $x\in\partial M$, $x\in V$, V offen

Dann ist $V\not\subset M$, da sonst $x\in V\subset M^\circ$ wäre. D.h. $V\cap M^c\neq\emptyset$

Da $\partial M = \partial(M^c)$ ist auch $V\cap M\neq\emptyset$.

"$\Leftarrow$" $x\notin\mathring{M}$, da $\mathring{M}$ offen und $\mathring{M}\cap M^c=\emptyset$.

$x\notin (M^c)^\circ$, " $(M^c)^\circ$ offen " $(M^c)^\circ\cap M=\emptyset$.

$\Rightarrow x\in(\mathring{M}\cup(M^c)^\circ)^c = \partial M$. □

Bsp. (1) $(X,d) = (\mathbb{R}^n, |\cdot|)$, $M = B_r(x_0)$

M offen, also $M = \mathring{M}$

Ist $d(x,x_0) = r$, so ist $B_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset \neq B_\varepsilon(x) \cap M^c$
für jedes $\varepsilon > 0$, d.h. $x \in \partial M$, $\{x : d(x,x_0) = r\} \subset \partial M$

Ist $d(x,x_0) > r$, so ist $x \in (M^c)^\circ$, also $x \notin \partial M$.

d.h. $\partial M = \{x : d(x,x_0) = r\}$

$\Rightarrow \overline{M} = M \cup \partial M = \{x : d(x,x_0) \leq r\}$.

Bem.: Gilt nicht in bel. metrischen Räumen. $r = 1$,
d = Trivialmetrik

(2) $(X,d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $M = \mathbb{Q}$. Ist dann $x_0 \in \mathbb{R}$, so liegt in jeder Umgebung von x_0 ein $x_1 \in \mathbb{Q}$ und ein $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, also hat jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ die Randpunkteigenschaft. Es folgt: $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathring{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \partial \mathbb{Q} = \emptyset$. $\mathbb{Q}$ besitzt also (als Teilmenge von $(\mathbb{R}, |\cdot|)$) keinen inneren Punkt. Die Verallgemeinerung dieser Situation führt auf die folgende

Def.: Eine Teilmenge M eines topologischen Raumes (X,τ) heißt <u>dicht</u>, wenn $\overline{M} = X$ gilt.

Ein top. Raum (X,τ) heißt <u>separabel</u>, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.