Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

45	46	47	48	Z	Σ

Übungen zur Analysis II
Blatt 12

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 45 (1+4+1 Punkte, Fixpunktsatz von Edelstein)

(a) Finden Sie ein Beispiel einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die zwar Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ ist, aber keinerlei Fixpunkte besitzt.

(b) Es seien (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $f\colon X \to X$ mit $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Zeigen Sie: Dann besitzt f einen eindeutigen Fixpunkt.

(c) Geben Sie ein Beispiel an für das der Banachsche Fixpunktsatz nicht die Existenz eines Fixpunktes liefert, der Fixpunktsatz von Edelstein aber schon.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g\colon X \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = d(x, f(x))$. Mit ein bisschen mehr Mühe kann man auch für diesen Fixpunktsatz zeigen, dass die Folge $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x_0 \in X$ gegen den Fixpunkt konvergiert.

Aufgabe 46 (4 Punkte) Betrachten Sie die Differentialgleichung $y' = \sin(x)y + 2xe^{-\cos(x)}$. Lösen Sie für diese Differentialgleichung die Anfangswertaufgaben $y(0) = 2$, $y(0) = 0$, und $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}$.

Aufgabe 47 (3 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen der Bernoullischen Differentialgleichung
$$y' = 8xy - xy^{3/4}.$$
Geben Sie für jede Lösung ihren maximalen Definitionsbereich an.

Aufgabe 48 (3 Punkte) Bestimmen Sie die Lösung der für $x \in (0, \infty)$ gegebenen Anfangswertaufgabe
$$y' = -2\frac{y}{x} + \frac{1}{x}, \qquad y(1) = 1.$$
Hinweis: Der Ansatz $w(t) = y(e^t)$ führt auf eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.

Zusatzaufgabe (4 Punkte) Es sei $\phi : I \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung der Anfangswertaufgabe (= Lösung mit maximal großem Definitionsbereich, der den Anfangspunkt enthält)
$$y' = e^x y^2 + 5, \qquad y(0) = 1.$$
Zeigen Sie, dass $\ln(2) \notin I$.

Hinweis: Sei $\psi : J \to \mathbb{R}$ die maximale Lösung der Anfangswertaufgabe
$$y' = e^x y^2, \qquad y(0) = 1.$$
Durch konkretes Lösen sieht man $\ln(2) \notin J$. Zeigen Sie nun $\phi \geq \psi$.

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 17.01.2023, 12.25 Uhr
Besprechung: ab Mi., 25.01.2023 in den Übungen