

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 11

Name: Name: Rückgabe in Gruppe:
MatrNr: MatrNr:

Aufgabe 41 (2+2 Punkte) Eine verschärfte Version des Banachschen Fixpunktsatzes lautet: Es sei (X, d) ein vollständiger, metrischer Raum und $f: X \rightarrow X$ sei eine Abbildung, so dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert womit f^n eine Kontraktion ist. Dann besitzt f einen eindeutigen Fixpunkt.

Zeigen Sie diese Variante des Banachschen Fixpunktsatzes und geben Sie einen Raum (X, d) sowie eine Abbildung $f: X \rightarrow X$, die keine Kontraktion ist, aber die Voraussetzungen der obigen Variante erfüllt sind.

Hinweis: Mit f^n ist die n -te Iterierte der Abbildung f bezeichnet, also $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f(x))$ usw.

Aufgabe 42 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Inversion an der Einheitskugel

$$i: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \frac{x}{|x|^2}$$

konform ist. Welche Folgerung ergibt sich für den Betrag der Funktionaldeterminante $\det(Di(x))$?

Aufgabe 43 (4 Punkte) Untersuchen Sie, ob das nichtlineare Gleichungssystem

$$x = \exp\left(\frac{1}{2}(\sin(y) - 1)\right) \quad \text{und} \quad y = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

eine eindeutige Lösung $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ besitzt. Formulieren Sie eine Behauptung und beweisen Sie diese.

Aufgabe 44 (4 Punkte) Es sei $f(x_1, x_2) = (x_1^2 - x_2^2, 2x_1x_2)$.

- (a) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ lokal umkehrbar ist. Ist f als Abbildung von $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ in sich global umkehrbar?
- (b) Finden Sie eine affin-lineare Abbildung, die die lokale Umkehrung f^{-1} in der Nähe von $f(1, -1)$ approximiert.

Zusatzaufgabe (4 Punkte) Lösen Sie die folgenden Anfangswertaufgaben.

- (a) $y' = \cos(x) \sin(y), \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$
- (b) $y'' = \sqrt{1 + y'^2}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$
- (c) $y' + y = \cosh(x), \quad y(0) = \frac{1}{4}$
- (d) $y' = (y - x)^2, \quad y(0) = 2$

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten, einen guten Übergang ins neue Jahr und eine erholsame vorlesungsfreie Zeit!

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 10.01.2023, 12.25 Uhr
Besprechung: ab Mi., 18.01.2023 in den Übungen