

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 9

Name: Name: Rückgabe in Gruppe:
MatrNr: MatrNr:

Aufgabe 33 (4 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass

- (a) alle Richtungsableitungen von f im Nullpunkt existieren,
- (b) die Formel $\frac{\partial f}{\partial \xi}(0) = \nabla f(0) \cdot \xi$ für die Richtungsableitung in Richtung $\xi \in \mathbb{R}^2$ nur in Ausnahmefällen zutrifft,
- (c) f im Nullpunkt unstetig ist.

Aufgabe 34 (4 Punkte) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = y^x$ berechne man das Taylor-Polynom dritten Grades im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 2)$

- (a) durch Berechnung aller partiellen Ableitungen bis zur dritten Ordnung einschließlich und anschließende Auswertung in (x_0, y_0) ,
- (b) unter Verwendung der Exponential- und Logarithmus-Reihen, wobei man alle Beiträge höherer als dritter Ordnung vernachlässigt.

Aufgabe 35 (4 Punkte) Eine differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt konform in $x \in \Omega$, wenn es eine Zahl $\rho(x) > 0$ gibt, so dass für die Jacobi-Matrix $Df(x)$ gilt

$$Df(x)^T Df(x) = \rho(x)^2 E_n$$

wobei E_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix ist. f heißt konform, wenn f in jedem $x \in \Omega$ konform ist. Zeigen Sie:

- (a) Die Verknüpfung konformer Abbildungen ist konform.
- (b) Konforme Abbildungen sind winkeltreu, d.h. Schneiden sich zwei in Ω verlaufende differenzierbare Kurven γ und β in $\gamma(t_0) = \beta(t_0) \in \Omega$ unter dem Winkel θ , so schneiden sich $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ und $\tilde{\beta} = f \circ \beta$ in $f(\gamma(t_0)) = f(\beta(t_0))$ unter dem selben Winkel.

Aufgabe 36 (4 Punkte) Betrachten Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 y - x^2 - 2xy + 2x - y.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte, ob dort ein Maximum, ein Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.