

**ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II**  
**BLATT 8**

Name: ..... Name: ..... Rückgabe in Gruppe:  
 MatrNr: ..... MatrNr: .....

**Aufgabe 29 (2+3 Punkte)**

(a) Es seien  $c > 0$ ,  $\nu \in \mathbb{R}^n$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \psi(x, t) = f(x \cdot \nu - c|\nu|t)$$

eine Lösung der sogenannten linearen Wellengleichung  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \Delta \psi(x, t)$  ist. Hierbei bezeichnet  $x \cdot \nu = \sum_{i=1}^n x_i \nu_i$  das  $\mathbb{R}^n$ -Skalarprodukt und  $\Delta f(x, t) = \operatorname{div} \nabla f(x, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x, t)$  den Laplace-Operator.

(b) Berechnen Sie für  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktion  $G : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $G(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln(|x|^\alpha)$ , sowie  $\Delta G(x)$ . Für welche Werte von  $\alpha$  erfüllt  $G$  die Laplace-Gleichung  $\Delta G = 0$ .

**Aufgabe 30 (1+1+1+1 Punkte)** Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld  $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert man die Rotation von  $F$  durch

$$\operatorname{rot} F = \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

Zeigen Sie:

- (a) Ist  $F$  zweimal stetig partiell differenzierbar, so gilt  $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$ .
- (b) Ist  $\phi : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig partiell differenzierbar, so ist  $\operatorname{rot} \nabla \phi = (0, 0, 0)$ .

Kann es eine Funktion  $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  geben, so dass  $\nabla \phi(x) = (x^2 - yz, y^2 - xz, -xy)$ ? Falls ja, bestimmen Sie eine solche. Gibt es ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld  $F$  mit  $\operatorname{rot} F = x$ ?

**Aufgabe 31 (4 Punkte)** Die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}.$$

Man zeige:

- (a)  $f$  ist eine  $C^1$ -Funktion auf  $\mathbb{R}^2$ .
- (b)  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f$  und  $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f$  existieren auf  $\mathbb{R}^2$  und sind stetig auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .
- (c)  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = 1$  und  $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = -1$

**Aufgabe 32 (2 Punkte)** Bestimmen Sie die Richtungsableitungen von

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto xy^2 + y \exp(-xy)$$

in Richtung  $\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$  in den Punkten  $\xi_1 = (1, 0)$  und  $\xi_2 = (2, 3)$ .

**Abgabe:** in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 06.12.2022, 12.25 Uhr  
**Besprechung:** ab Mi., 14.12.2022 in den Übungen