HEINRICH-HEINE-UNIVERSITÄT DÜSSELDORF
PROF. DR. AXEL GRÜNROCK
JOSEPH ADAMS M.SC.

25	26	27	28	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 7

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 25 (4 Punkte) Berechnen Sie mit Hilfe der Matrix-Exponentialfunktion die eindeutig bestimmte Lösung des folgenden Anfangswertproblems für ein System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= -y_1(x) - y_2(x) \qquad & y_1(0) = 1, \\ y_2'(x) &= y_1(x) - y_2(x) \qquad & y_2(0) = 1. \end{aligned}$$

Aufgabe 26 (2+2 Punkte) Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Die bereits in Aufgabe 14 eingeführte Abstandsfunktion lässt sich wie folgt verallgemeinern: Der Abstand zweier nichtleerer Teilmengen $K \subset X$ und $A \subset X$ ist

$$\operatorname{dist}(K, A) := \inf \{\operatorname{dist}(x, A) \mid x \in K\} = \inf \{d(x, y) \mid x \in K, y \in A\}.$$

(a) Zeigen Sie: Ist A abgeschlossen, K kompakt und $A \cap K = \emptyset$, so gilt $\operatorname{dist}(K, A) > 0$.

(b) Stimmt die Aussage in (a), wenn von K lediglich die Abgeschlossenheit (anstelle der Kompaktheit) vorausgesetzt wird? Begründen Sie.

Aufgabe 27 (2+2 Punkte) Für zwei Teilmengen A und B von $\mathbb{R}^n$ sei ihre Minkowski-Summe

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

(a) Zeigen Sie: Sind A und B kompakt, so ist auch $A + B$ kompakt.

(b) Geben Sie ein Beispiel zweier abgeschlossener Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ an, für die $A + B$ *nicht* abgeschlossen ist.

Aufgabe 28 (4 Punkte) Für ein partiell differenzierbares Vektorfeld $F = (F_1, F_2, \dots, F_n) : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^n$ heißt

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

die Divergenz von F. Für ein solches Feld F und eine partiell differenzierbare Funktion $\phi : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$ zeige man:

$$\operatorname{div}(\phi F) = \langle \nabla \phi, F \rangle + \phi \operatorname{div} F.$$

Als Anwendung berechne man die Divergenz von

$$G : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3, \qquad x \mapsto \frac{\cos(k|x|) - 1}{|x|^3} \cdot x$$

(hierbei sei $k \in \mathbb{R}$ fest).

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 29.11.2022, 12.25 Uhr
Besprechung: ab Mi., 07.12.2022 in den Übungen