Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

17	18	19	20	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 5

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 17 (4 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge f_n auf $\mathbb{R}$ punktweise konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion f. Untersuchen Sie ferner, ob auf den Intervallen $I = [0,2]$ bzw. $J = [2,\infty)$ die Konvergenz gleichmäßig ist.

Aufgabe 18 (4 Punkte) Bestimmen Sie eine Folge von Funktionen $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, sodass $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = 0$ mit gleichmäßiger Konvergenz und $\int_0^\infty f_n(x)dx = 1$. Wieso ist das kein Widerspruch zu Satz 7 aus Abschnitt 1.4 der Vorlesung?

Aufgabe 19 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(A) = \exp(a) \begin{pmatrix} \cosh(b) & \sinh(b) \\ \sinh(b) & \cosh(b) \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Es gilt $A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, und die Potenzen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$ können direkt durch Matrix-Multiplikation berechnet werden.

Aufgabe 20 (4 Punkte, Poisson-Kern für den Kreis) Für $x \in \mathbb{R}$ und $q \in (-1,1)$ sei

$$P(q,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} q^{|k|} e^{ixk}.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $r \in [0,1)$ diese Reihe auf $\{(q,x) \in (-1,1) \times \mathbb{R} \mid |q| \leq r\}$ absolut und gleichmäßig konvergiert, und verifizieren Sie die Identität

$$P(q,x) = \frac{1-q^2}{1-2q\cos(x)+q^2}.$$

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 15.11.2022, 12.25 Uhr
Besprechung: ab Mi., 23.11.2022 in den Übungen