Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

13	14	15	16	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 4

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 13 (4 Punkte, Lindelöf'scher Überdeckungssatz) Man zeige, dass jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ geschrieben werden kann als abzählbare Vereinigung offener Intervalle. Um dies einzusehen, vereinige man möglichst große Intervalle um die rationalen Elemente von U.

Aufgabe 14 (2+2 Punkte) Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subset X$. Der Abstand von $x \in X$ zur Menge A ist definiert als

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf \{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

(a) Zeigen Sie, es gilt $\operatorname{dist}(x, A) > 0$ genau dann, wenn $x \in (X \setminus A)^\circ$ und

(b) die Abbildung $\operatorname{dist}(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$, ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1.

Aufgabe 15 (2+2 Punkte) Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) Zeigen Sie unter Verwendung der ε-δ-Definition: Ist f gleichmäßig stetig, so bildet f Cauchy-Folgen in (X, d_X) auf Cauchy-Folgen in (Y, d_Y) ab.

(b) Gilt die in (a) genannte Folgerung stets auch dann, wenn f lediglich stetig, aber nicht gleichmäßig stetig, ist? Begründen Sie.

Aufgabe 16 (4 Punkte) Bestimmen Sie ∂M, $\overline{M}$ und M° für die Teilmenge

$$M = \left\{ \left(x, \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right) \mid 0 < x < \frac{1}{\pi} \right\}$$

des $\mathbb{R}^2$, der mit der euklidischen Norm ausgestattet sei. Begründen Sie Ihre Ergebnisse sorgfältig!

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 08.11.2022, 12.25 Uhr
Besprechung: ab Mi., 16.11.2022 in den Übungen