

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 3

Name: Name: Rückgabe in Gruppe:
 MatrNr: MatrNr:

Aufgabe 9 (2+2 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass durch $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ und $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ Normen auf \mathbb{K}^n definiert werden.
 (b) Beweisen Sie für $x \in \mathbb{K}^n$ und $p, q \in [1, \infty)$ mit $p \leq q$ die Ungleichungen $\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|x\|_q$.

Aufgabe 10 (2+2 Punkte) Aus der Vorlesung kennen wir die sogenannten p -Normen $\|\cdot\|_p$ auch auf unendlich-dimensionalen Vektorräumen.

- (a) Zeigen Sie, dass die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf dem Vektorraum $C([0, 1])$ nicht äquivalent sind.
 (b) Es seien $p, q \in [1, \infty)$ unterschiedlich. Zeigen Sie, dass die Normen $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ auf dem Folgenraum ℓ^1 nicht äquivalent sind.

Hinweis: Um notatorischen Aufwand zu sparen verwendet man bei Intervallen für Hölder-Exponenten manchmal auch "im unendlichen abgeschlossene" Intervalle, wie z.B. $p \in [1, \infty]$. Die bedeutet lediglich, dass $p \in [1, \infty)$ oder $p = \infty$ gilt, also die Norm $\|\cdot\|_p$ (für $p \in [1, \infty)$) bzw. $\|\cdot\|_\infty$ (für $p = \infty$) gemeint ist.

Aufgabe 11 (3 Punkte, Umgekehrte Dreiecksungleichung) Zeigen Sie für einen beliebigen \mathbb{K} -Vektorraum V mit Norm $\|\cdot\|$, dass $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ für alle $x, y \in V$ gilt.

Aufgabe 12 (3+2 Punkte)

- (a) Welche der folgenden Mengen sind offen, welche sind abgeschlossen? Begründen Sie kurz.

$$[0, 2) \cup (2, 4] \qquad \{0\} \cup \{e^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad (-\infty, 5]$$

- (b) Es seien $A, B \subset \mathbb{K}^n$ zwei Mengen. Zeigen Sie:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$$

Hinweis: Überlegen Sie sich zu dem zweiten Teil von (b) auch ein Beispiel, das zeigt, dass im Allgemeinen keine Gleichheit gilt.

Zusatzaufgabe (max. 4 Punkte) Es sei $a > 1$ ein Parameter. Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Zusatzpunkt, bis zu einem Maximum von 4 Punkten.

- (a) $\int_0^1 \sqrt{1 - \sqrt{x}} dx$ (b) $\int_0^1 e^{e^x} - e^{e^x - x} dx$ (c) $\int_0^\infty \frac{dx}{1 + e^x}$ (d) $\int_0^\infty \frac{x(e^{-x} - 1)}{e^x - 1} dx$
 (e) $\int_0^\pi \cos(x + \cos(x)) dx$ (f) $\int_0^\infty x^5 e^{-x} \sin(x) dx$ (g) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \ln(\sqrt{3} + \tan(x)) dx$ (h) $\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{x^2}{1 + x^4} dx$

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Mi., 02.11.2022, 12.25 Uhr
Besprechung: ab Mi., 09.11.2022 in den Übungen