Analysis II

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2020

Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Für diesen Spezialfall soll nun ein Lösungsfundamentalsystem der homogenen Gleichung explizit angegeben werden. Es sei also

$$Ly = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} \qquad \text{mit} \qquad a_n = 1,\, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}.$$

Dann heißt P_L, definiert durch

$$P_L(\lambda) := \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k,$$

das *charakteristische Polynom* des Differenzialoperators L bzw. der Differenzialgleichung $Ly = 0$. (Tatsächlich handelt es sich um das charakteristische Polynom der Matrix im äquivalenten System erster Ordnung, was die Bezeichnung rechtfertigt, jedoch ein wenig lästig nachzurechnen ist.)

Zerlegung des charakteristischen Polynoms in Linearfaktoren

Über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen können wir nach dem Fundamentalsatz der Algebra jedes Polynom vollständig in Linearfaktoren zerlegen. Also existieren Nullstellen $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{C}$ von P_L mit Vielfachheiten $m_1, ..., m_r$, so dass P_L die Darstellung

$$P_L(\lambda) = \prod_{j=1}^{r} (\lambda - \lambda_j)^{m_j}$$

besitzt. (Zu beachten ist hierbei, dass der führende Kooeffizient $a_n = 1$ vorausgesetzt ist.) In dieser Situation gilt der folgende

Satz 1

Durch die n Funktionen

$$e^{\lambda_1 x},\ xe^{\lambda_1 x},\ ...,x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x},...$$

$$e^{\lambda_2 x},\ xe^{\lambda_2 x},\ ...,x^{m_2-1}e^{\lambda_2 x},...$$

$$...$$

$$e^{\lambda_r x},\ xe^{\lambda_r x},\ ...,x^{m_r-1}e^{\lambda_r x}$$

ist ein Lösungsfundamentalsystem der Gleichung $Ly = 0$ gegeben.

Im Beweis gibt es zweierlei zu tun: Zum einen ist nachzurechnen, dass es sich um Lösungen handelt; zum anderen ist die lineare Unabhängigkeit zu überprüfen:

Beweis (I)

Allgemein gilt für $k \geq 1$, dass

$$(\frac{d}{dx} - \lambda)x^k e^{\lambda x} = kx^{k-1}e^{\lambda x}$$

und daher für alle $m \geq k+1$

$$(\frac{d}{dx} - \lambda)^m x^k e^{\lambda x} = 0.$$

Damit ist für $k \leq m_j - 1$

$$L(x^k e^{\lambda_j x}) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{r} (\frac{d}{dx} - \lambda_i)^{m_i} \big((\frac{d}{dx} - \lambda_j)^{m_j} x^k e^{\lambda_j x} \big) = 0.$$

Beweis (II): lineare Unabhängigkeit

Jede Linearkombination der im Satz genannten Funktionen hat die Gestalt

$$\sum_{k=1}^{r} P_k(x)e^{\lambda_k x} \quad \text{mit Polynomen } P_k \text{ und} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{für} \quad i \neq j.$$

Daher reicht es zu zeigen, dass

$$\sum_{k=1}^{r} P_k(x)e^{\lambda_k x} = 0 \,\forall\, x \in I \quad \Rightarrow P_1(x) = ... = P_r(x) = 0 \,\forall\, x \in I. \qquad (!)$$

Der Beweis von (!) kann per Induktion über $r \geq 1$ geführt werden, wobei man beim Induktionsanfang lediglich durch $e^{\lambda_1 x}$ dividieren muss.

Beweis (III): Induktionsschritt $r \to r+1$ für die lineare Unabhängigkeit

Aus

$$\sum_{k=1}^{r} P_k(x) e^{\lambda_k x} + P_{r+1}(x) e^{\lambda_{r+1} x} = 0 \quad \forall x \in I$$

folgt

$$\sum_{k=1}^{r} P_k(x) e^{(\lambda_k - \lambda_{r+1})x} + P_{r+1}(x) = 0 \quad \forall x \in I,$$

wobei $\lambda_k - \lambda_{r+1} \neq 0$ ist. Jetzt differenziert man so oft, bis $\frac{d^N}{dx^N} P_{r+1}(x) = 0$ ist. Dann ergibt sich

$$0 = \sum_{k=1}^{r} Q_k(x) e^{(\lambda_k - \lambda_{r+1})x},$$

wobei die Polynome Q_k gegeben sind durch

Beweis (IV): Fortsetzung und Schluss

$$\frac{d^N}{dx^N} P_k(x) e^{(\lambda_k - \lambda_{r+1})x} = Q_k(x) e^{(\lambda_k - \lambda_{r+1})x}.$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt $Q_k = 0$, also

$$\frac{d^N}{dx^N} P_k(x) e^{(\lambda_k - \lambda_{r+1})x} = 0$$

und damit ist $P_k(x) e^{(\lambda_k - \lambda_{r+1})x}$ ein Polynom, was nur möglich ist, wenn $P_k = 0$ gilt. Hierbei ist $1 \leq k \leq r$ beliebig und damit auch $P_{r+1} = 0$.

Beispiel: Gedämpfte Schwingungen

Eine Federpendel, ein mathematisches Pendel (= Fadenpendel nach Linearisierung), ein elektrischer Schwingkreis und viele ähnliche Phänomene werden modelliert durch die Schwingungsgleichung

$$Ly := y'' + 2ay' + b^2 y = 0,$$

wobei $2ay'$ ein Dämpfungsterm ist (weshalb stets $a \geq 0$ betrachtet wird) und $b^2 y$ die rücktreibende Kraft ($b \neq 0$). Hier lautet das charakteristische Polynom

$$P_L(\lambda) = \lambda^2 + 2a\lambda + b^2$$

mit den Nullstellen $\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b^2}$. Wir unterscheiden vier Fälle:

1. $a = 0$ (Schwingung ohne Dämpfung):

Hier sind $\lambda_{1,2} = \pm ib$ und

$$\varphi_{1,2}(x) = e^{\pm ibx}$$

bilden ein Lösungsfundamentalsystem. Durch Linearkombination kann man die reellen Lösungen

$$\psi_1(x) = \cos(bx) \quad \text{und} \quad \psi_2(x) = \sin(bx)$$

erzeugen.

2. $0 < a^2 < b^2$ (gedämpfte Schwingung):

Die Nullstellen von P_L sind $\lambda_{1,2} = -a \pm i\omega$ mit $\omega^2 = b^2 - a^2$. Die Funktionen

$$\varphi_{1,2}(x) = e^{-ax} e^{\pm i\omega x}$$

bilden ein LFS, ein reelles LFS ist gegeben durch

$$\psi_1(x) = e^{-ax} \cos(\omega x) \quad \text{und} \quad \psi_2(x) = e^{-ax} \sin(\omega x).$$

3. $a^2 = b^2$ (aperiodischer Grenzfall):

Hier hat das charakteristische Polynom die doppelte Nullstelle $\lambda_1 = \lambda_2 = -a$,

$$\varphi_1(x) = e^{-ax} \quad \text{und} \quad \varphi_2(x) = xe^{-ax}$$

bilden ein reelles Lösungsfundamentalsystem.

In manchen technischen Anwendungen ist man an diesem aperiodischen Grenzfall besonders interessiert, ein Beispiel hierfür sind die Federungen von Fahrzeugen: Weder der Schwingfall auf der vorigen Folie noch der sogenannte "Kriechfall" auf der nachfolgenden sind besonders wünschenwert, wenn Sie z. B. mit einem Motorrad durch ein Schlagloch fahren.

4. $b^2 < a^2$ (Kriechfall, Pendel im Honig)

Hier sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms gegeben durch

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b^2} < 0,$$

was zu dem sogleich reellen LFS

$$\varphi_{1,2}(x) = e^{\lambda_{1.2} x}$$

führt.