Analysis II

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2020

2. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

Mit diesem 2. Kapitel der Vorlesung kommen wir zum Kernstück der Analysis II: Der Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$. Hierbei betrachten wir Funktionen

$$f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}^m,$$

$$x = (x_1, ..., x_n) \mapsto f(x) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n)),$$

wobei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Dem Fall $m = 1$ kommt eine besondere Bedeutung zu. Für $n = 2$ schreibt man oft

$$f : (x, y) \mapsto f(x, y)$$

und entsprechend für $n = 3$

$$f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z).$$

2.1 Partielle Ableitungen

Definition (partielle Differenzierbarkeit in einem Punkt): Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt in $x_0 \in \Omega$ partiell differenzierbaar nach der j-ten Komponente x_j, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{1}{t}\big(f(x_0 + te_j) - f(x_0)\big) =: \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$$

existiert. (Hierbei bezeichnet $e_j = (\delta_{kj})_{1 \leq k \leq n}$ den j-ten kanonischen Basisvektor des $\mathbb{R}^n$.) In diesem Fall heißt $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ die partielle Ableitung von f nach x_j im Punkt x_0.

Bemerkungen

(1) Für eine $\mathbb{R}^m$-wertige Funktion existiert dieser Grenzwert genau dann, wenn er für alle Komponentenfunktionen existiert. Daher kann man sich bei vielen Fragen auf den Fall $m = 1$ beschränken.

Bemerkungen

(1) Für eine $\mathbb{R}^m$-wertige Funktion existiert dieser Grenzwert genau dann, wenn er für alle Komponentenfunktionen existiert. Daher kann man sich bei vielen Fragen auf den Fall $m = 1$ beschränken.

(2) Die partielle Ableitung kann man als gewöhnliche Ableitung der Schnittfunktionen

$$f_{(j)} : t \mapsto f_{(j)}(t) := f(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

auffassen,wobei alle übrigen Variablen festgehalten werden. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = \frac{df_{(j)}}{dt}\Big|_{t=x_j}.$$

Daher können partielle Ableitungen nach den aus der Analysis I bekannten Rechenregeln für Ableitungen bestimmt werden.

Weitere Bemerkungen:

(3) Gebräuchlich als Bezeichnungen für $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ sind ferner: $\partial_{x_j} f$, ∂_j (Kaballo, Königsberger); $D_{x_j} f$, $D_j f$ (Forster); f_{x_j} etc..

Weitere Bemerkungen:

(3) Gebräuchlich als Bezeichnungen für $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ sind ferner: $\partial_{x_j} f$, ∂_j (Kaballo, Königsberger); $D_{x_j} f$, $D_j f$ (Forster); f_{x_j} etc..

(4) Die Definition der partiellen Ableitung ist bereits dann sinnvoll, wenn $t = 0$ ein Häufungspunkt der Menge $\{t \in \mathbb{R} : x_0 + te_j \in \Omega\}$ ist. Wir setzen der Einfachheit halber Ω als offen voraus, so dass diese Bedingung für jedes $x_0 \in \Omega$ erfüllt ist. (Man kann z. B. auch Quader jeder Art in der Definition zulassen; ggf. muss man dann einzelne Eckpunkte ausnehmen.)

Weitere Definitionen

Definition: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Dann heißt f

(1) *partiell differenzierbar in* $x_0 \in \Omega$, falls *alle* partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)$ existieren,

Weitere Definitionen

Definition: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Dann heißt f

(1) *partiell differenzierbar in* $x_0 \in \Omega$, falls *alle* partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)$ existieren,

(2) *partiell differenzierbar* (in Ω), wenn f in jedem $x_0 \in \Omega$ partiell differenzierbar ist,

Weitere Definitionen

Definition: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Dann heißt f

(1) *partiell differenzierbar in* $x_0 \in \Omega$, falls *alle* partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)$ existieren,

(2) *partiell differenzierbar* (in Ω), wenn f in jedem $x_0 \in \Omega$ partiell differenzierbar ist,

(3) *stetig partiell differenzierbar* (in Ω), wenn f partiell differenzierbar ist und stetige partielle Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ besitzt.

Weitere Definitionen

Definition: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Dann heißt f

(1) *partiell differenzierbar in* $x_0 \in \Omega$, falls *alle* partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)$ existieren,

(2) *partiell differenzierbar* (in Ω), wenn f in jedem $x_0 \in \Omega$ partiell differenzierbar ist,

(3) *stetig partiell differenzierbar* (in Ω), wenn f partiell differenzierbar ist und stetige partielle Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ besitzt.

Bezeichnung:
$C^1(\Omega, \mathbb{R}^m) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}^m,\ f \text{ ist stetig partiell differenzierbar }\}.$

Beispiele

(1) Die Radiusfunktion

$$r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto r(x) := |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

ist stetig partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial r}{\partial x_j}(x) = \frac{d}{dt}\left(x_1^2 + .. + x_{j-1}^2 + t^2 + x_{j+1}^2 + .. + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_{t=x_j}$$

$$= \frac{1}{2|x|} 2x_j = \frac{x_j}{|x|}.$$

Beim 2. "$=$" wurde die Kettenregel angewendet.

Beispiele

(2) Ist $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist die rotationssymmetrische Funktion

$$f \circ r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(r(x)) = f(|x|)$$

partiell differenzierbar. Mit der Kettenregel und Beispiel (1) erhalten wir

$$\frac{\partial (f \circ r)}{\partial x_j}(x) = f'(r(x)) \frac{\partial r}{\partial x_j}(x) = f'(|x|) \frac{x_j}{|x|},$$

was man meist kurz in der Form

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(|x|) = f'(|x|) \frac{x_j}{|x|}$$

notiert.

Beispiele

(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x,y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & : \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ist auf $\mathbb{R}^2$ (auch im Nullpunkt!) partiell differenzierbar:

(i) Für $(x,y) \neq (0,0)$ haben wir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}2x = 2y\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

und aus Symmetriegründen $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Fortsetzung von Beispiel (3)

Für $(x, y) = (0, 0)$ ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\Big(\frac{2x0}{x^2 + 0^2} - 0\Big) = 0$$

und ebenso $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Wir hatten bereits gesehen, dass f im Nullpunkt unstetig ist (4. Vorlesung, das Gegenbeispiel auf S. 22 f.). Partielle Differenzierbarkeit impliziert also *nicht* die Stetigkeit einer Funktion (im Gegensatz zum Fall $n = 1$).

Der Gradient

Häufig werden die partiellen Ableitungen einer *reellwertigen* Funktion zu einem Zeilenvektor zusammengefasst, dem sogenannten *Gradienten*:

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann heißt

$$\mathrm{grad} f(x) := \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\Big)$$

der *Gradient* von f im Punkt $x \in \Omega$.

Bezeichnung: $\nabla f(x) := \mathrm{grad} f(x)$, ∇ wird auch "Nabla - Operator" genannt.

Beispiel (4)

Für die Funktion

$$r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto r(x) := |x|$$

(vgl. Beispiel (1) oben) ist $\dfrac{\partial r}{x_j}(x) = \dfrac{x_j}{|x|}$, $1 \leq j \leq n$. Damit ergibt sich

$$\nabla r(x) := \mathrm{grad} r(x) = \left(\frac{x_1}{r(x)}, ..., \frac{x_n}{r(x)}\right) = \frac{x}{r(x)}$$

(wobei x als Zeilenvektor aufgefasst wird) oder kurz $\nabla|x| = \dfrac{x}{|x|}$.
Für die Verknüpfung $f \circ r$ (Bsp. (2) oben) haben wir

$$\nabla f(|x|) = f'(|x|)\nabla|x| = f'(|x|)\frac{x}{|x|}.$$

Höhere Ableitungen

Definition: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar. Wir nennen f

Höhere Ableitungen

Definition: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar. Wir nennen f

(1) *zweimal partiell differenzierbar*, falls alle ersten partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ ebenfalls partiell differenzierbar sind;

Höhere Ableitungen

Definition: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ partiell differenzierbar. Wir nennen f

(1) *zweimal partiell differenzierbar*, falls alle ersten partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ ebenfalls partiell differenzierbar sind;

(2) *zweimal stetig partiell differenzierbar*, wenn f zweimal partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung stetig sind.

Bezeichnungen

(1) Die zweiten partiellen Ableitungen schreiben wir als
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} := \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_k},\ 1 \leq i, k \leq n.$$

Bezeichnungen

(1) Die zweiten partiellen Ableitungen schreiben wir als
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} := \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_k},\ 1 \leq i, k \leq n.$$

(2) Die Gesamtheit aller zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ bilden einen Vektorraum, den wir mit $C^2(\Omega, \mathbb{R}^m)$ bezeichnen.

Bezeichnungen

(3) Allgemeiner für $k \geq 2$:

$$C^k(\Omega, \mathbb{R}^m) := \{f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m) : \frac{\partial f}{\partial x_j} \in C^{k-1}(\Omega, \mathbb{R}^m) \, \forall 1 \leq j \leq n\}$$

und

$$C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) := \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Letzteres sind die unendlich oft partiell differenzierbaren Funktionen.

Bezeichnungen

(3) Allgemeiner für $k \geq 2$:

$$C^k(\Omega, \mathbb{R}^m) := \{f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m) : \frac{\partial f}{\partial x_j} \in C^{k-1}(\Omega, \mathbb{R}^m) \, \forall 1 \leq j \leq n\}$$

und

$$C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) := \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Letzteres sind die unendlich oft partiell differenzierbaren Funktionen.

(4) In der Physik spricht man von "Vektorfeldern", wenn man vektorwertige Funktionen meint. Diese werden unterschieden von sogenannten Skalarfeldern $\varphi : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to \mathbb{R}$.

Der Satz von H. A. Schwarz

Ist die Reihenfolge der Differentiation nach verschiedenen Variablen vertauschbar? Im allgemeinen nicht, aber bei C^2-Funktionen sehr wohl. Das ist der Gegenstand des folgenden Satzes von Hermann Amandus Schwarz:

Satz 1: Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Dann gilt für alle $x_0 \in \Omega$ und $i, j \in \{1, ..., n\}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

Für den durchaus nicht trivialen Beweis dieses Satzes sei auf das Manuskript zur Vorlesung verwiesen.

Bemerkungen:

(1) Es gibt Beispiele zweimal partiell differenzierbarer Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für die

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0),$$

siehe Übungsaufgabe 25 (to appear). Die Voraussetzung der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen ist also notwendig für diese Vertauschung der Differentiationsreihenfolge.

Dies beweist man per Induktion über $k \geq 2$, der Satz von Schwarz liefert sowohl den Induktionsanfang als auch das entscheidende Argument für den Induktionsschritt.

Bemerkungen:

(1) Es gibt Beispiele zweimal partiell differenzierbarer Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für die

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0),$$

siehe Übungsaufgabe 25 (to appear). Die Voraussetzung der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen ist also notwendig für diese Vertauschung der Differentiationsreihenfolge.

(2) Verallgemeinerung: Sei $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$ und π eine Permutation von $\{1, ..., k\}$. Dann gilt:

$$\frac{\partial^k f}{\partial_{x_{i_1}} ... \partial_{x_{i_k}}} = \frac{\partial^k f}{\partial_{x_{i_{\pi(1)}}} ... \partial_{x_{i_{\pi(k)}}}}$$

Dies beweist man per Induktion über $k \geq 2$, der Satz von Schwarz liefert sowohl den Induktionsanfang als auch das entscheidende Argument für den Induktionsschritt.