Analysis II

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2020

1.4 Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen - Nochmals Anwendungen

Was liefern uns die Sätze 7 und 8 im Hinblick auf Potenzreihen und Potenzreihen von Matrizen?

1. Potenzreihen

Für $z \in \mathbb{C}$ sei

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Für jedes $r \in (0, R)$ konvergiert diese Reihe absolut und gleichmäßig auf $\overline{B_r(0)}$. Sind $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben mit $a < b$ und $|a| < R$ sowie $|b| < R$, so konvergiert diese Reihe auch auf $[a, b]$ absolut und gleichmäßig. Satz 7 ergibt in dieser Situation

Gliedweise Integrierbarkeit von Potenzreihen

$$\int_a^b P(x)dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \Big|_a^b .$$

Man sagt:

Potenzreihen können gliedweise integriert werden.

(Auch dieses Ergebnis ist bereits in Analysis I auf anderem Weg gezeigt worden.)

Gliedweise Differenzierbarkeit von Potenzreihen

Bilden wir die Ableitungen

$$s_n'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$$

der Partialsummenfolge, so erhalten wir (mit $n \to \infty$) wieder eine Potenzreihe

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

mit Konvergenzradius $R_Q = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} \right)^{-1}$.

Konvergenzradius von Q

Für $n, N \in \mathbb{N}$ mit $N \leq n$ haben wir

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{n|a_n|} = \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[N]{N}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Bilden wir den Limes superior dieser Ungleichungskette, ergibt sich für alle $N \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{R} \leq \frac{1}{R_Q} \leq \sqrt[N]{N}\frac{1}{R}$$

Wegen $\lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{N} = 1$ folgt $R_Q = R$.

Anwendung von Satz 8

In $[a, b]$ mit $|a|, |b| < R$ sind damit die Voraussetzungen von Satz 8 gegeben, nämlich

Anwendung von Satz 8

In $[a, b]$ mit $|a|, |b| < R$ sind damit die Voraussetzungen von Satz 8 gegeben, nämlich

(1) $s_n \to P$ hier sogar mit gleichmäßiger Konvergenz, wo punktweise genügen würde,

Anwendung von Satz 8

In $[a, b]$ mit $|a|, |b| < R$ sind damit die Voraussetzungen von Satz 8 gegeben, nämlich

(1) $s_n \to P$ hier sogar mit gleichmäßiger Konvergenz, wo punktweise genügen würde,

(2) $s_n' \to Q$ mit gleichmäßiger Konvergenz.

Anwendung von Satz 8

In $[a, b]$ mit $|a|, |b| < R$ sind damit die Voraussetzungen von Satz 8 gegeben, nämlich

(1) $s_n \to P$ hier sogar mit gleichmäßiger Konvergenz, wo punktweise genügen würde,

(2) $s_n' \to Q$ mit gleichmäßiger Konvergenz.

Anwendung des Satzes ergibt: $P : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar und es gilt

$$P'(x) = Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

(Dies hatten wir in Analysis I durch direkte Rechnung verifiziert, was etwas mühsam war.)

2. Potenzreihen von Matrizen

Weiterhin sei $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und $r \in (0, R)$. Wie wir oben festgestellt haben, konvergiert dann für Matrizen $A \in M_n(\mathbb{K})$ die Reihe

$$P(A) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$$

auf $\overline{B_R(0)} \subset M_n(\mathbb{K})$ absolut und gleichmäßig. Jetzt fixieren wir $M \in M_n(\mathbb{K})$ und definieren

$$f : [\frac{-r}{\|M\|}, \frac{r}{\|M\|}] \to M_n(\mathbb{K}), \quad x \mapsto f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k M^k.$$

Gliedweise Differenzierbarkeit

Der Definitionsbereich ist so gewählt, dass $\|xM\| = |x|\|M\| \leq r < R$ ist und somit die Reihe absolut und gleichmäßig auf diesem Intervall konvergiert. Dasselbe gilt für

$$g : [\frac{-r}{\|M\|}, \frac{r}{\|M\|}] \to M_n(\mathbb{K}), \quad x \mapsto g(x) := \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} M^k.$$

Satz 8' ist daher anwendbar und ergibt:

Die Funktion $f : [\frac{-r}{\|M\|}, \frac{r}{\|M\|}] \to M_n(\mathbb{K})$ ist stetig differenzierbar und es gilt $f' = g$.

Also: Auch matrixwertige Potenzreihen des obigen Typs können gliedweise differenziert werden.

Beispiel: Die Matrix-Exponentialfunktion mit reellem Parameter

Für eine feste Matrix $M \in M_n(\mathbb{K})$ definieren wir die Funktion

$$\exp_M : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{K}), \quad x \mapsto \exp_M(x) := \exp xM = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k M^k}{k!}.$$

Dann gilt

$$exp'_M(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k M^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1} M^k}{(k-1)!}$$
$$= M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k M^k}{k!} = M \exp_M(x).$$

Eine Matrix-Differentialgleichung

Das können wir auch so formulieren: Bei festem $M \in M_n(\mathbb{K})$ löst $\exp_M$ die Matrix-Differentialgleichung

$$A'(x) = MA(x).$$

Hierbei ist $A \in C^1(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{K}))$ die (gesuchte) Lösung dieser Differentialgleichung. Verlangt man zusätzlich $A(0) = E_n$ mit der $n \times n$ - Einheitsmatrix E_n, so ist $\exp_M$ hierdurch eindeutig bestimmt. Begründung:

Beweis der Eindeutigkeit:

Sei $A \in C^1(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{K}))$ gegeben mit $A'(x) = MA(x)$ sowie $A(0) = E_n$, und

$$F(x) := \exp_M(-x)A(x).$$

Dann erhält man, da die Produktregel auch für matrixwertige Funktionen gilt (Warum?),

$$F'(x) = -M \exp_M(-x)A(x) + \exp_M(-x)MA(x).$$

Nun vertauschen M und $\exp_M(x)$, so dass sich $F'(x) = 0$ ergibt. Nach dem Hauptsatz gilt also $F(x) = const = E_n$. Da $(\exp_M(x))^{-1} = \exp_M(-x)$, folgt $A(x) = \exp_M(x)$. $\square$

Systeme linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Die Matrix-Exponentialfunktion wird verwendet, um Systeme gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zu lösen. Gesucht ist dabei eine Funktion $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$, die der Gleichung $y'(x) = My(x)$ mit Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ genügt. Hierbei sind $M \in M_n(\mathbb{K})$ und $y_0 \in \mathbb{K}^n$ fest vorgegeben. Ausgeschrieben:

$$y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ . \\ . \\ . \\ y_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & ... & m_{1n} \\ . & ... & . \\ . & ... & . \\ . & ... & . \\ m_{n1} & ... & m_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ . \\ . \\ . \\ y_n'(x) \end{pmatrix} = My(x).$$

Diese Überlegungen können wir zusammenfassen zu

Satz 9

Gegeben seien $M \in M_n(\mathbb{K})$ und $y_0 \in \mathbb{K}^n$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y'(x) = My(x) \qquad y(0) = y_0$$

genau eine Lösung $y \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$. Diese ist gegeben durch $y(x) = \exp_M(x) y_0$.

Begründung: Dass hierdurch eine Lösung gegeben ist, folgt aus den Aussagen über $\exp_M$. Damit ist die Existenzaussage geklärt. Die Eindeutigkeit sieht man ein wie in der obigen Begründung der Eindeutigkeit der Matrix-Differentialgleichung.

Bemerkung

Im Vorlesungsmanuskript finden Sie an dieser Stelle nochmals einige Ausführungen zu den trigonometrischen bzw. Fourier-Reihen. Auch hierauf werden wir in diesem Semester aus Zeitgründen verzichten.

Mit der Matrix-Exponentialfunktion und ihrer Anwendung werden wir uns im Tutorium am 22.05. etwas eingehender und in Form konkreter Rechenaufgaben beschäftigen. Daher verzichte ich auch diesmal auf Verständnis- und weiterführende Fragen.