

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II  
BLATT 9

Name: ..... Name: ..... Rückgabe in Gruppe:  
MatrNr: ..... MatrNr: .....

**Aufgabe 33 (4 Punkte)** Eine differenzierbare Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt konform in  $x \in \Omega$ , wenn es eine Zahl  $\rho(x) > 0$  gibt, so dass für die Jacobi-Matrix  $Df(x)$  gilt

$$Df(x)^T Df(x) = \rho(x)^2 E_n$$

wobei  $E_n$  die  $n \times n$ -Einheitsmatrix ist.  $f$  heißt konform, wenn  $f$  in jedem  $x \in \Omega$  konform ist. Zeigen Sie:

- (a) Die Verknüpfung konformer Abbildungen ist konform.
- (b) Konforme Abbildungen sind winkeltreu, d.h. Schneiden sich zwei in  $\Omega$  verlaufende differenzierbare Kurven  $\gamma$  und  $\beta$  in  $\gamma(t_0) = \beta(t_0) \in \Omega$  unter dem Winkel  $\theta$ , so schneiden sich  $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$  und  $\tilde{\beta} = f \circ \beta$  in  $f(\gamma(t_0)) = f(\beta(t_0))$  unter dem selben Winkel.

**Aufgabe 34 (4 Punkte)** Für die Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$(x, y) \mapsto (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$$

berechnen Sie die Matrix  $Df(x, y)^T Df(x, y)$  und bestimmen Sie wo die Abbildung  $f$  konform ist.

**Aufgabe 35 (4 Punkte)** Betrachten Sie die Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2y - x^2 - 2xy + 2x - y.$$

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte, ob dort ein Maximum, ein Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

**Aufgabe 36 (4 Punkte)** Für die Funktion  $f : \mathbb{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto f(x, y) = y^x$  berechne man das Taylor-Polynom dritten Grades im Entwicklungspunkt  $(x_0, y_0) = (0, 2)$

- (a) durch Berechnung aller partiellen Ableitungen bis zur dritten Ordnung einschließlich und anschließende Auswertung in  $(x_0, y_0)$ ,
- (b) unter Verwendung der Exponential- und Logarithmus-Reihen, wobei man alle Beiträge höherer als dritter Ordnung vernachlässigt.