

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II  
BLATT 5

Name: ..... Name: ..... Rückgabe in Gruppe:  
MatrNr: ..... MatrNr: .....

**Aufgabe 17 (4 Punkte)** Für  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}.$$

Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge  $f_n$  auf  $\mathbb{R}$  punktweise konvergiert und bestimmen Sie die Grenzfunktion  $f$ . Untersuchen Sie ferner, ob auf den Intervallen  $I = [0, 2]$  bzw.  $J = [2, \infty)$  die Konvergenz gleichmäßig ist.

**Aufgabe 18 (4 Punkte)** Bestimmen Sie eine Folge von Funktionen  $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$  mit gleichmäßiger Konvergenz und  $\int_0^\infty f_n(x) dx = 1$ . Wieso ist das kein Widerspruch zu Satz 7 aus Abschnitt 1.4 der Vorlesung?

**Aufgabe 19 (4 Punkte)** Zeigen Sie, dass für die Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt

$$\exp(A) = \exp(a) \begin{pmatrix} \cosh(b) & \sinh(b) \\ \sinh(b) & \cosh(b) \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Es gilt  $A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , und die Potenzen  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$  können direkt durch Matrix-Multiplikation berechnet werden.

**Aufgabe 20 (4 Punkte, Poisson-Kern für den Kreis)** Für  $x \in \mathbb{R}$  und  $q \in (-1, 1)$  sei

$$P(q, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q^{|k|} e^{ixk}.$$

Zeigen Sie, dass für jedes  $r \in [0, 1)$  diese Reihe auf  $\{(q, x) \in (-1, 1) \times \mathbb{R} \mid |q| \leq r\}$  absolut und gleichmäßig konvergiert, und verifizieren Sie die Identität

$$P(q, x) = \frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos(x) + q^2}.$$

**Abgabe:** in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 14.05.2024, 10.25 Uhr  
**Besprechung:** ab Mi., 22.05.2024 in den Übungen