Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

13	14	15	16	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS II
BLATT 4

Name: ..... Name: ..... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: ..... MatrNr: ....

Aufgabe 13 (4 Punkte) Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq A \subset X$. Der Abstand von $x \in X$ zur Menge A ist definiert als

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf \{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

(a) Zeigen Sie, es gilt $\operatorname{dist}(x, A) > 0$ genau dann, wenn $x \in (X \setminus A)^\circ$ und
(b) die Abbildung $\operatorname{dist}(\cdot, A) : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$, ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1.

Aufgabe 14 (4 Punkte) Bestimmen Sie ∂M, $\overline{M}$ und M° für die Teilmenge

$$M = \left\{ \left(x, \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mid 0 < x < \frac{1}{\pi} \right\}$$

des $\mathbb{R}^2$, der mit der euklidischen Norm ausgestattet sei. Begründen Sie Ihre Ergebnisse sorgfältig!

Aufgabe 15 (4 Punkte) Es seien (X, τ) ein topologischer Raum und $A, B \subset X$. Zeigen Sie:

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(b) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

(c) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

(d) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$

Erläutern Sie anhand geeigneter Beispiele, dass in den Teilen (c) und (d) die anderen Inklusionen nicht gelten.

Aufgabe 16 (4 Punkte) Welche der folgenden linearen Abbildungen sind stetig? Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

(a) $A : (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto Af := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $B : (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([a, b]), \|\cdot\|_1)$, $f \mapsto f$

(c) $C : (C([a, b]), \|\cdot\|_1) \to (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$, $f \mapsto f$

Die involvierten Normen sind definiert durch $\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}$ und $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 07.05.2024, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Mi., 15.05.2024 in den Übungen