Analysis I

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/24

6.3 Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Dieser Satz stellt den Zusammmenhang her zwischen Integration und Differentiation. Er sagt aus, dass unter bestimmten Voraussetzungen Ableitung und Integration zueinander inverse Operationen sind. Es werden zwei Formulierungen des Hauptsatzes gegeben:

Satz 1 (Hauptsatz, 1. Version): Es sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit integrierbarer Ableitung F'. Dann gilt:

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a).$$

Intervalladditivität des Integrals

Bei der zweiten Formulierung des Hauptsatzes betrachtet man das Integral als Funktion der oberen Integralgrenze, also

$$x \mapsto F(x) := \int_a^x f(t)dt, \qquad (x \in [a, b])$$

für eine integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dass dies stets definiert ist, zeigt das folgende

Lemma 1: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $x \in (a, b)$. Dann ist f auch auf $[a, x]$ und auf $[x, b]$ integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt.$$

Konvention

Für $b < a$ setzt man

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx.$$

Dann gilt die Identität in Lemma 1 auch *ohne* die Voraussetzung $a < x < b$, sofern die Integrierbarkeit von f über das größte auftretende Intervall gegeben ist.

2. Version des Hauptsatzes

Satz 2: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F(x) := \int\limits_a^x f(t)dt$ für $x \in [a, b]$. Dann ist F in $[a, b]$ differenzierbar, und es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Stammfunktion

Definition: Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $F : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$, so heißt F eine *Stammfunktion* von f

bzw. das *unbestimmte Integral* von f.

Schreibweise: $F(x) = \int f(x)dx$.

Bemerkungen

(1) Sind F und G Stammfunktionen derselben Funktion f, so ist $F - G$ konstant. Die Umkehrung gilt ebenfalls: Ist F eine Stammfunktion von f und $G = F + c$, so ist auch G eine Stammfunktion von f.

Bemerkungen

(1) Sind F und G Stammfunktionen derselben Funktion f, so ist $F - G$ konstant. Die Umkehrung gilt ebenfalls: Ist F eine Stammfunktion von f und $G = F + c$, so ist auch G eine Stammfunktion von f.

(2) Nach Satz 1 gilt: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit Stammfunktion F, so gilt $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Weitere Schreibweisen: $F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b = \big[F(x)\big]_a^b$.

Bemerkungen

(1) Sind F und G Stammfunktionen derselben Funktion f, so ist $F - G$ konstant. Die Umkehrung gilt ebenfalls: Ist F eine Stammfunktion von f und $G = F + c$, so ist auch G eine Stammfunktion von f.

(2) Nach Satz 1 gilt: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit Stammfunktion F, so gilt $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.
Weitere Schreibweisen: $F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b = \big[F(x)\big]_a^b$.

(3) Satz 2 lautet: Zu jeder stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist mit $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion gegeben. Die Stetigkeitsvoraussetzung ist hierbei wesentlich.

Beispiele für Stammfunktionen: Tafel

6.4 Elementare Integrationsmethoden

Aufgrund des Hauptsatzes liefert uns jede Ableitungsregel eine Regel bzw. eine Methode der Integration. Z.B. erhalten wir durch Integration (oder Umkehrung) der Produktregel die Regel der partiellen Integration:

Partielle Integration

Satz 1: Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

(Hierbei: $f(x)g(x)\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.)

Die Substitutionsregel

Satz 2: Es sei $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int\limits_{a}^{b} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Bemerkung: Als Regel für unbestimmte Integrale lautet dies

$$\int f(t)dt\Big|_{t=\varphi(x)} = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$