Analysis I

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/24

6.2 Integrierbarkeitskriterium und Anwendungen

Satz 1: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent:

6.2 Integrierbarkeitskriterium und Anwendungen

Satz 1: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent:

(1) f ist integrierbar,

6.2 Integrierbarkeitskriterium und Anwendungen

Satz 1: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent:

(1) f ist integrierbar,

(2) zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung $Z_\varepsilon = \{x_0, ..., x_p\}$ von $[a, b]$, so dass

$$S(f, Z_\varepsilon) - s(f, Z_\varepsilon) < \varepsilon,$$

6.2 Integrierbarkeitskriterium und Anwendungen

Satz 1: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent:

(1) f ist integrierbar,

(2) zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung $Z_\varepsilon = \{x_0, ..., x_p\}$ von $[a, b]$, so dass

$$S(f, Z_\varepsilon) - s(f, Z_\varepsilon) < \varepsilon,$$

(3) zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung $Z_\varepsilon = \{x_0, ..., x_p\}$ von $[a, b]$, so dass

$$\sum_{k=1}^{p} \sup\{|f(x) - f(y)| : x_{k-1} \leq x, y \leq x_k\}(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon.$$

Integrierbarkeit stetiger bzw. monotoner Funktionen

Satz 2: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig oder monoton. Dann ist f integrierbar.

Integrierbarkeit stetiger bzw. monotoner Funktionen

Satz 2: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig oder monoton. Dann ist f integrierbar.

Mit Satz 2 sind zwei wichtige Klassen integrierbarer Funktionen bekannt. Noch wissen wir aber nicht, ob z. B. das Produkt oder der Quotient zweier integrierbarer Funktionen wieder integrierbar ist. Den Schlüssel dazu liefert das folgende:

Lemma 1

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und

$$\Phi : f([a, b]) \to \mathbb{R}$$

Lipschitz-stetig, so ist auch $\Phi \circ f$ integrierbar.

Folgerungen:

(1) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so sind auch $|f|$, $f_+ := \max(f, 0)$, $f_- := \max(-f, 0)$ und f^2 integrierbar. Gilt für ein $\delta > 0$, dass $|f(x)| \geq \delta$ für alle $x \in [a, b]$, so ist auch $\frac{1}{f}$ integrierbar.

Folgerungen:

(1) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so sind auch $|f|$, $f_+ := \max(f, 0)$, $f_- := \max(-f, 0)$ und f^2 integrierbar. Gilt für ein $\delta > 0$, dass $|f(x)| \geq \delta$ für alle $x \in [a, b]$, so ist auch $\frac{1}{f}$ integrierbar.

(2) Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so sind auch fg, $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ integrierbar.

Dreiecksungleichung für Integrale

Mit der Integrierbarkeit von $|f|$ erhalten wir diese aus der Monotonie des Integrals:

Lemma 2: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Beweis: Folgt aus der Monotonie des Integrals, da für alle $x \in [a, b]$ sowohl $f(x) \leq |f(x)|$ als auch $-f(x) \leq |f(x)|$ gelten.

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz 3: Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $g(x) \geq 0$ und $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt:

$$m \int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Ist f stetig, so existiert ein $\xi \in [a, b]$, so dass

$$f(\xi) \int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx.$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz 3: Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $g(x) \geq 0$ und $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt:

$$m \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx.$$

Ist f stetig, so existiert ein $\xi \in [a, b]$, so dass

$$f(\xi) \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Bemerkung: Für stetiges f gilt insbesondere
$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(\xi)$. (Wähle $g = 1$ in Satz 3 !)