Analysis I

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/24

6. Integration

6.1 Das Riemann-Integral: Definition und einfache Eigenschaften

Allgemeine Voraussetzung: Stets sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine *beschränkte* Funktion.

Ziel: Berechnung der Fläche zwischen x-Achse und dem Graphen $G_f = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$.

Idee: Approximation durch Rechteckflächen von oben und unten.

6. Integration

6.1 Das Riemann-Integral: Definition und einfache Eigenschaften

Allgemeine Voraussetzung: Stets sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine *beschränkte* Funktion.

Ziel: Berechnung der Fläche zwischen x-Achse und dem Graphen $G_f = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$.

Idee: Approximation durch Rechteckflächen von oben und unten.

Betrachte dazu Zerlegungen $Z = \{x_0, ..., x_p\}$ von $[a, b]$ mit $a = x_0 < x_1 < ... < x_{p-1} < x_p = b$, so dass $[a, b] = \bigcup_{i=1}^{p} [x_{i-1}, x_i]$.

$Z = \{x_0, ..., x_p\}$ heißt *feiner* als $Z' = \{y_0, ..., y_q\}$, wenn $Z' \subset Z$.

$Z + Z' = \{x_0, ..., x_p\} \cup \{y_0, ..., y_q\} = \{z_0, ..., z_r\}$ mit $a = z_0 < ... < z_r = b$ heißt gemeinsame Verfeinerung von Z und Z'.

Ober- und Untersummen

Definition: Die Summen

$$S(f,Z) = \sum_{k=1}^{p} M_k(x_k - x_{k-1}) \text{ mit } M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

und

$$s(f,Z) = \sum_{k=1}^{p} m_k(x_k - x_{k-1}) \text{ mit } m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

heißen (Riemannsche) *Ober*- bzw. *Untersummen* von f bezüglich der Zerlegung $Z = \{x_0, ..., x_p\}$.

Bemerkungen:

(1) Mit $m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ und $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ gilt

$$m(b - a) \leq s(f, Z) \leq S(f, Z) \leq M(b - a).$$

Bemerkungen:

(1) Mit $m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ und $M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ gilt

$$m(b-a) \leq s(f,Z) \leq S(f,Z) \leq M(b-a).$$

(2) Es ist $s(f,Z) = -S(-f,Z)$.

Die Feinheit einer Zerlegung

Definition: Für $Z = \{x_0, ..., x_p\}$ heißt $\delta(Z) := \max_{k=1}^{p}\{x_k - x_{k-1}\}$ die *Feinheit* der Zerlegung Z.

Die Feinheit einer Zerlegung

Definition: Für $Z = \{x_0, ..., x_p\}$ heißt $\delta(Z) := \max_{k=1}^{p}\{x_k - x_{k-1}\}$ die *Feinheit* der Zerlegung Z.

Lemma 1: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt mit $|f(x)| \leq K$ für alle $x \in [a, b]$. $Z = \{x_0, ..., x_p\}$ und $Z' = \{y_0, ..., y_q\}$ seien Zerlegungen von $[a, b]$. Dann gelten

(1) $s(f, Z) \leq s(f, Z + Z') \leq s(f, Z) + 2K(q - 1)\delta(Z)$,

(2) $S(f, Z) \geq S(f, Z + Z') \geq S(f, Z) - 2K(q - 1)\delta(Z)$.

Die Feinheit einer Zerlegung

Definition: Für $Z = \{x_0, ..., x_p\}$ heißt $\delta(Z) := \max_{k=1}^{p}\{x_k - x_{k-1}\}$ die *Feinheit* der Zerlegung Z.

Lemma 1: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt mit $|f(x)| \leq K$ für alle $x \in [a, b]$. $Z = \{x_0, ..., x_p\}$ und $Z' = \{y_0, ..., y_q\}$ seien Zerlegungen von $[a, b]$. Dann gelten

(1) $s(f, Z) \leq s(f, Z + Z') \leq s(f, Z) + 2K(q-1)\delta(Z)$,

(2) $S(f, Z) \geq S(f, Z + Z') \geq S(f, Z) - 2K(q-1)\delta(Z)$.

Folgerung: Jede Untersumme ist kleiner/gleich jeder Obersumme,

da $\qquad s(f, Z) \leq s(f, Z + Z') \leq S(f, Z + Z') \leq S(f, Z')$.

Ober- und Unterintegral

Definition: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißen

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup_Z s(f, Z)$$

das untere und

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf_Z S(f, Z)$$

das obere Riemann-Integral von f über $[a, b]$.

Ober- und Unterintegral

Definition: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißen

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx := \sup_{Z} s(f, Z)$$

das untere und

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx := \inf_{Z} S(f, Z)$$

das obere Riemann-Integral von f über $[a, b]$.

Bemerkung: Stets gelten $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx \leq \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx$ und

$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = -\int_{a}^{\overline{b}} -f(x)dx$, da $s(f, Z) \leq S(f, Z')$ und

$s(f, Z) = -S(-f, Z)$.

Riemann-Integrierbarkeit (nach Darboux, 1875)

Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar, wenn

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx.$$

In diesem Fall nennen wir

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx$$

das (Riemann-) Integral von f über $[a, b]$.

Riemann-Integrierbarkeit (nach Darboux, 1875)

Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar, wenn

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

In diesem Fall nennen wir

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

das (Riemann-) Integral von f über $[a, b]$.

Bezeichnungen: a untere, b obere Integrationsgrenze;
$[a, b]$ Integrationsintervall; f Integrand;
x Integrationsvariable (beliebig $\neq a, b$).

Ausgezeichnete Zerlegungsfolgen

Der nächste Schritt besteht darin, das Integral einer Funktion f über ein Intervall $[a, b]$ als Grenzwert von Folgen darzustellen.

Definition: Eine Folge $(Z_n)_n$ von Zerlegungen eines Intervalls $[a, b]$ heißt *ausgezeichnet* oder eine *Zerlegungsnullfolge*, wenn $\lim_{n\to\infty} \delta(Z_n) = 0$.

Ober- und Unterintegral als Grenzwerte von Folgen:

Satz 1: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $(Z_n)_n$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge, so gelten

Ober- und Unterintegral als Grenzwerte von Folgen:

Satz 1: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $(Z_n)_n$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge, so gelten

$$(1) \quad \lim_{n\to\infty} s(f, Z_n) = \int\limits_{\overline{a}}^{b} f(x)dx \quad \text{und}$$

Ober- und Unterintegral als Grenzwerte von Folgen:

Satz 1: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $(Z_n)_n$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge, so gelten

(1) $\lim_{n\to\infty} s(f, Z_n) = \underline{\int_a^b} f(x)dx$ und

(2) $\lim_{n\to\infty} S(f, Z_n) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$.

Folgerungen

Folgerungen

(1) Sind $(Z_n)_n$ und $(Z'_n)_n$ ausgezeichnete Zerlegungsfolgen, so dass

$$\lim_{n\to\infty} s(f, Z_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, Z'_n) =: J,$$

so ist f auf $[a, b]$ integrierbar und es ist $\int\limits_a^b f(x)dx = J$.

Folgerungen

(1) Sind $(Z_n)_n$ und $(Z'_n)_n$ ausgezeichnete Zerlegungsfolgen, so dass

$$\lim_{n\to\infty} s(f, Z_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, Z'_n) =: J,$$

so ist f auf $[a, b]$ integrierbar und es ist $\int_a^b f(x)dx = J$.

(2) Ist umgekehrt f auf $[a, b]$ integrierbar, so gilt für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge $(Z_n)_n$, dass

$$\lim_{n\to\infty} s(f, Z_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, Z_n) = \int_a^b f(x)dx.$$

Riemannsche Zwischensummen

Definition: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, $Z = \{x_0, ..., x_p\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ und $\xi = (\xi_1, ..., \xi_p)$ ein p-Tupel von Zwischenstellen, d. h.:

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq ... \leq x_{p-1} \leq \xi_p \leq x_p = b.$$

Dann heißt

$$\sigma(f, Z, \xi) := \sum_{k=1}^{p} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

die (Riemannsche) Zwischensumme von f bezüglich der Zerlegung Z und der Auswahl ξ der Zwischenstellen.

Lemma 2

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $(Z_n)_n$ eine ausgezeichnete

Zerlegungsfolge und $\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, ..., \xi_p^{(n)})$ eine Folge von

(p-Tupeln von) Zwischenstellen, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, Z_n, \xi^{(n)}) = \int_a^b f(x)dx$$

Zum Beweis der Umkehrung dieser Aussage zeigen wir:

Lemma 3

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $Z = \{x_0, ..., x_p\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ p-Tupel ξ und η von Zwischenstellen, so dass

$$s(f, Z) \leq \sigma(f, Z, \xi) \leq s(f, Z) + \varepsilon \quad \text{und}$$

$$S(f, Z) \geq \sigma(f, Z, \eta) \geq s(f, Z) - \varepsilon.$$

Satz 2:

Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar, wenn für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge $(Z_n)_n$ und für jede Wahl $(\xi^{(n)})$ der Zwischenstellen die Folge

$$(\sigma(f, Z_n, \xi^{(n)}))_n$$

der Riemann-Summen konvergiert. Ist dies der Fall, so haben alle Summenfolgen denselben Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, Z_n, \xi^{(n)}) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Bemerkung

Die Bedingung in Satz 2 wurde von Riemann (in seiner Habilitationsschrift von 1854) als definierende Eigenschaft der Integrierbarkeit genannt. Ähnliche Summen (genauer: Links - Summen) findet man schon 1823 bei Cauchy, der allerdings die Stetigkeit des Integranden voraussetzt. Die eigentliche Leistung Riemanns war es, die Klasse der integrierbaren Funktionen einzuführen und aufzuzeigen, dass diese sehr viel größer ist als die der stetigen Funktionen.

Die Riemannsche Auffassung des Integrals als Grenzwert von Zwischensummen führt unmittelbar auf die

Linearität des Integrals

Satz 3: Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\lambda f + \mu g$ auf $[a, b]$ integrierbar und es gilt

$$\int\limits_a^b \lambda f(x) + \mu g(x) dx = \lambda \int\limits_a^b f(x) dx + \mu \int\limits_a^b g(x) dx.$$

Linearität des Integrals

Satz 3: Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\lambda f + \mu g$ auf $[a, b]$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Beweis: Folgt durch Grenzübergang aus

$$\sigma(\lambda f + \mu g, Z_n, \xi^{(n)}) = \lambda \sigma(f, Z_n, \xi^{(n)}) + \mu \sigma(g, Z_n, \xi^{(n)}).$$

Integral für komplexwertige Funktionen

Definition: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ beschränkt, $g = \mathrm{Re} f$ und $h = \mathrm{Im} f$ seien integrierbar. Dann heißt f integrierbar und man setzt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + i \int_a^b h(x)dx.$$

Integral für komplexwertige Funktionen

Definition: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ beschränkt, $g = \mathrm{Re} f$ und $h = \mathrm{Im} f$ seien integrierbar. Dann heißt f integrierbar und man setzt

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx + i \int_a^b h(x)dx.$$

Folgerung (aus Satz 3 und dieser Definition): Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ integrierbar und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Dann ist auch $\lambda f + \mu g$ auf $[a, b]$ integrierbar und es gilt

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Monotonie des Integrals

Satz 4: Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Monotonie des Integrals

Satz 4: Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Dann gilt

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Beweis: Folgt durch Grenzübergang aus

$$\begin{aligned}\sigma(f, Z_n, \xi^{(n)}) &= \sum_{k=1}^{p} f(\xi_k^{(n)})(x_k - x_{k-1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{p} g(\xi_k^{(n)})(x_k - x_{k-1}) = \sigma(g, Z_n, \xi^{(n)}).\end{aligned}$$