Analysis I

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/24

5.3 Taylorsche Formel und Taylorreihe

Satz 1 (Taylorsche Formel): Es seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar in $[a, b]$ und $(n + 1)$-mal differenzierbar in (a, b), sowie $x, x_0 \in [a, b]$.

Dann existiert ein $\xi \in (\min(x, x_0), \max(x, x_0))$, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Bemerkung: Für $n = 0$ ergibt sich wieder der MWS.

Bemerkungen:

Bemerkungen:

(1) Oft wird die Taylor-Formel in der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_{n+1}(\xi, x, x_0)$$

notiert mit einem nicht genauer spezifizierten Restglied $R_{n+1}(\xi, x, x_0)$. Die gerade bewiesene Darstellung

$$R_{n+1}(\xi, x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

wird als *Lagrange-Form* des Restglieds bezeichnet. Vorteil: Leicht zu merken. Andere Darstellungen erhält man durch Wahl einer anderen Funktion g bei der Anwendung des allgemeinen MWS im Beweis.

Bemerkungen:

(2) Die Taylorsche Formel ist nützlich zur Berechnung von Grenzwerten ($\rightarrow$ Übungen) und zur Herleitung weiterer Kriterien für lokale Extrema, die im folgenden formuliert und gezeigt werden sollen:

Ein notwendiges Kriterium für lokale Maxima

Satz 2: Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. In $x_0 \in (a, b)$ besitze f ein lokales Maximum. Dann ist $f''(x_0) \leq 0$.

Ein notwendiges Kriterium für lokale Maxima

Satz 2: Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. In $x_0 \in (a, b)$ besitze f ein lokales Maximum. Dann ist $f''(x_0) \leq 0$.

Folgerung: Besitzt $f \in C^2((a, b), \mathbb{R})$ in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Minimum, so ist $f''(x_0) \geq 0$.

Ein notwendiges Kriterium für lokale Maxima

Satz 2: Es sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. In $x_0 \in (a,b)$ besitze f ein lokales Maximum. Dann ist $f''(x_0) \leq 0$.

Folgerung: Besitzt $f \in C^2((a,b),\mathbb{R})$ in $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Minimum, so ist $f''(x_0) \geq 0$.

Bemerkung: Auch an der Stelle eines isolierten lokalen Maximums/Minimums ist durchaus $f''(x_0) = 0$ möglich. Bsp.: $f(x) = \pm x^4$ in $x_0 = 0$.

Ein hinreichendes Kriterium für lokale Extrema

Satz 3: Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. In $x_0 \in (a, b)$ gelte $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ (bzw. $f''(x_0) > 0$. Dann besitzt f in x_0 ein isoliertes lokales Maximum (bzw. Minimum).

Ein hinreichendes Kriterium für lokale Extrema

Satz 3: Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. In $x_0 \in (a, b)$ gelte $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ (bzw. $f''(x_0) > 0$. Dann besitzt f in x_0 ein isoliertes lokales Maximum (bzw. Minimum).

Bemerkung: Die Voraussetzung $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \leq 0$ ist *nicht* ausreichend, um auf ein lokales Maximum in x_0 zu schließen. Bsp.: $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$. Hier ist $f'(0) = f''(0) = 0$, es liegt aber kein Extremum vor.

Die Taylorreihe

Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, so können wir in der Taylorschen Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

den Grenzwert für $n \to \infty$ betrachten mit der Absicht, auf diese Weise eine Potenzreihendarstellung von f zu gewinnen. Dazu definieren wir zunächst nur formal die Taylorreihe von f:

Definition: Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und $x_0 \in I$. Dann heißt

$$Tf(x, x_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

die *Taylorreihe* von f mit *Entwicklungspunkt* x_0.

Bemerkungen:

Bemerkungen:

(1) Üblicherweise betrachtet man $x_0 = 0$.

Bemerkungen:

(1) Üblicherweise betrachtet man $x_0 = 0$.

(2) Die Konvergenz der Reihe ist außer in $x_0 = 0$ keineswegs gesichert. Es gibt unendlich oft differenzierbare Funktionen, deren Taylorreihen *nur* im Entwicklungspunkt konvergieren. Ein (etwas aufwändiges) Beispiel dazu finden Sie in Kaballo: Einführung in die Analysis I, Thm. 36.11 und Bsp. 36.12.

Bemerkungen:

(1) Üblicherweise betrachtet man $x_0 = 0$.

(2) Die Konvergenz der Reihe ist außer in $x_0 = 0$ keineswegs gesichert. Es gibt unendlich oft differenzierbare Funktionen, deren Taylorreihen *nur* im Entwicklungspunkt konvergieren. Ein (etwas aufwändiges) Beispiel dazu finden Sie in Kaballo: Einführung in die Analysis I, Thm. 36.11 und Bsp. 36.12.

(3) Selbst wenn die Taylorreihe von f konvergiert, muss sie keineswegs gegen f konvergieren. Bsp.:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & : \text{ für } x > 0 \\ 0 & : \text{ für } x \leq 0 \end{cases}.$$

Hier ist $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Rechnung!) und also $Tf(x, 0) = 0 \neq f(x)$.

Weitere Bemerkungen:

Weitere Bemerkungen:

(4) Aus der Taylorschen Formel ergibt sich

$$Tf(x, x_0) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} R_{n+1}(\xi, x, x_0) = 0$$

mit $R_{n+1}(\xi, x, x_0) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ oder einer anderen Darstellung.

Weitere Bemerkungen:

(4) Aus der Taylorschen Formel ergibt sich

$$Tf(x, x_0) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} R_{n+1}(\xi, x, x_0) = 0$$

mit $R_{n+1}(\xi, x, x_0) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ oder einer anderen Darstellung.

(5) Die Konvergenz von $Tf(x, x_0)$ gegen $f(x)$ ist äquivalent dazu, dass f eine Potenzreihendarstellung $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ besitzt. Denn in diesem Fall ist $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$, also $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Hieraus ergeben sich unmittelbar einige ...

Beispiele

Beispiele

(1) $T \exp(x, 0) = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Aus der Funktionalgleichung erhalten wir für einen beliebigen Entwicklungspunkt x_0:

$$T \exp(x, x_0) = \exp(x) = \exp(x_0 + x - x_0) =$$

$$\exp(x_0) \exp(x - x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp(x_0)(x - x_0)^k}{k!}.$$

Beispiele

(2) Die Taylorreihen der trigonometrischen Funktionen mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ sind ebenfalls bereits bekannt:

$$T\cos(x, 0) = \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \qquad \text{und}$$

$$T\sin(x, 0) = \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Neu sind hingegen die Abschätzungen für die Reihenreste, die sich aus der Taylorformel ergeben, hier für den Cosinus:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + R_{2n+2}(\xi, x, 0) \quad \text{mit}$$

$$|R_{2n+2}(\xi, x, 0)| = \left| \frac{\cos(\xi) x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right| \leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Die Logarithmusreihe

Für $|x| < 1$ ist $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ bereits bekannt. Mit Hilfe der Taylor-Formel können wir einsehen, dass diese Reihe auch noch für $x = -1$ gegen $\ln(2)$ konvergiert. Berechnung der Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x},\ f''(x) = \frac{-1}{(1-x)^2},\ f^{(3)}(x) = \frac{-2}{(1-x)^3},\ \ldots$$

allgemein:

$$f^{(n)}(x) = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}.$$

Damit lautet die Taylor-Formel:

Die Logarithmusreihe

$$\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \underbrace{\frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1-\xi)^{n+1}}}_{=R_{n+1}(\xi,x)}$$

Für $x = -1$ ist $\xi \in (-1,0)$ und damit $\left| \frac{1}{(1-\xi)^{n+1}} \right| \leq 1$, so dass $R_{n+1}(-1,\xi) \to 0$ $(n \to \infty)$. Es folgt

$$\ln(2) = \ln(1-(-1)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \simeq 0,693147.$$

Die Binomialreihe

Gesucht ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Taylorreihe der Funktion

$$f_\alpha : \{-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_\alpha(x) = (1 + x)^\alpha$$

mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. (Hier ist $\{= [$ für $\alpha \geq 0$ und $\{= ($ für $\alpha < 0$.)
Bekannte Spezialfälle:

Die Binomialreihe

Gesucht ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Taylorreihe der Funktion

$$f_\alpha : \{-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$$

mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. (Hier ist $\{ = [$ für $\alpha \geq 0$ und $\{ = ($ für $\alpha < 0$.)

Bekannte Spezialfälle:

(1) Für $\alpha \in \mathbb{N}$ gilt der binomische Lehrsatz

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k,$$

wobei $\binom{\alpha}{k}$ die üblichen Binomialkoeffizienten sind.

Die Binomialreihe

Gesucht ist für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Taylorreihe der Funktion

$$f_\alpha : \{-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_\alpha(x) = (1 + x)^\alpha$$

mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. (Hier ist $\{ = [$ für $\alpha \geq 0$ und $\{ = ($ für $\alpha < 0$.)

Bekannte Spezialfälle:

(1) Für $\alpha \in \mathbb{N}$ gilt der binomische Lehrsatz

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k,$$

wobei $\binom{\alpha}{k}$ die üblichen Binomialkoeffizienten sind.

(2) Die geometrische Reihe

$$f_{-1}(x) = (1 + x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

konvergiert für $|x| < 1$ absolut gegen f_{-1} und divergiert für $|x| = 1$.

Berechnung der Ableitungen von f_α

$$f'_\alpha(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f''_\alpha(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \ldots$$

allgemein: $f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+1-n)(1+x)^{\alpha-n}$,

insbesondere : $f_\alpha^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+1-n) = \prod_{k=1}^{n} \alpha+1-k$.

Im Hinblick auf die Koeffizienten $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ der Taylorreihe führt man die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{n} := \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha+1-k}{k}$$

ein, so dass $$Tf_\alpha(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Abschätzung der Größenordnung von $\binom{\alpha}{n}$

Für welche $x \in \{-1, 1]$ konvergiert diese Reihe (absolut)? Und: Konvergiert sie gegen f ? Zur Beantwortung dieser Fragen benötigen wir:

Lemma B1: Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ existiert

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha+1} \left| \binom{\alpha}{n} \right| \in (0, \infty).$$

insbesondere existieren $C_\alpha \geq \varepsilon_\alpha > 0$, so dass

$$\varepsilon_\alpha n^{-1-\alpha} \leq \left| \binom{\alpha}{n} \right| \leq C_\alpha n^{-1-\alpha}.$$

Folgerungen für die Konvergenz der Binomialreihe

Folgerungen für die Konvergenz der Binomialreihe

(1) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist der Konvergenzradius der Binomialreihe $= 1$, sie konvergiert daher absolut für alle $x \in (-1, 1)$.

Folgerungen für die Konvergenz der Binomialreihe

(1) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist der Konvergenzradius der Binomialreihe $= 1$, sie konvergiert daher absolut für alle $x \in (-1, 1)$.

(2) Ist $\alpha > 0$, so ist $|x|^n \left| \binom{\alpha}{n} \right| \leq C_\alpha n^{-1-\alpha}$, und die Binomialreihe konvergiert auch in den Randpunkten absolut.

Folgerungen für die Konvergenz der Binomialreihe

(1) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist der Konvergenzradius der Binomialreihe $= 1$, sie konvergiert daher absolut für alle $x \in (-1, 1)$.

(2) Ist $\alpha > 0$, so ist $|x|^n \left|\binom{\alpha}{n}\right| \leq C_\alpha n^{-1-\alpha}$, und die Binomialreihe konvergiert auch in den Randpunkten absolut.

(3) Ist $-1 < \alpha < 0$, so
  (3.1) divergiert die Reihe für $x = -1$, da $(-1)^n\binom{\alpha}{n} \geq \varepsilon_\alpha n^{-1-\alpha}$ und
  (3.2) konvergiert für $x = 1$ nach Leibniz, die Konvergenz ist aber nicht absolut.

Folgerungen für die Konvergenz der Binomialreihe

(1) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ ist der Konvergenzradius der Binomialreihe $= 1$, sie konvergiert daher absolut für alle $x \in (-1, 1)$.

(2) Ist $\alpha > 0$, so ist $|x|^n \left|\binom{\alpha}{n}\right| \leq C_\alpha n^{-1-\alpha}$, und die Binomialreihe konvergiert auch in den Randpunkten absolut.

(3) Ist $-1 < \alpha < 0$, so

(3.1) divergiert die Reihe für $x = -1$, da $(-1)^n \binom{\alpha}{n} \geq \varepsilon_\alpha n^{-1-\alpha}$ und

(3.2) konvergiert für $x = 1$ nach Leibniz, die Konvergenz ist aber nicht absolut.

(4) Ist $\alpha < -1$ und $|x| = 1$, so divergiert die Reihe, da $\left(\binom{\alpha}{n}\right)$ und damit $\left(x^n \binom{\alpha}{n}\right)$ keine Nullfolge bilden.

Restgliedabschätzungen

In allen Fällen, in denen die Binomialreihe konvergiert, konvergiert sie gegen f_α. Um dies einzusehen, zeigen wir, dass

$$0 = \lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x, 0, \xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{g(x) - g(0)}{g'(\xi)} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n,$$

woraus mit der Taylor-Formel die Behauptung folgt. Hierzu verwenden wir verschiedene Darstellungen des Restglieds, die sich durch passende Wahl der Funktion g ergeben. Stets ist $x_0 = 0$ (schon eingesetzt), $x \in [-1, 1]$ und $0 < |\xi| < |x|$ sowie

$$R_{n+1}(x, 0, \xi) = \frac{g(x) - g(0)}{g'(\xi)}(n + 1)\binom{\alpha}{n + 1}(1 + \xi)^{\alpha-1-n}(x - \xi)^n$$

Fallunterscheidung

(1) $|x| < 1$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ beliebig: Wir wählen $g(t) = x - t$, so dass

$\frac{g(x) - g(0)}{g'(\xi)} = x$ (Cauchy-Form des Restglieds) und damit

$$R_{n+1}(x, 0, \xi) = x(n+1)\binom{\alpha}{n+1}\frac{(x-\xi)^n}{(1+\xi)^n}(1+\xi)^{\alpha-1}.$$

Wir schreiben (beachte: x und ξ haben dasselbe Vorzeichen)

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| = |x|\left|\frac{1-\frac{\xi}{x}}{1+\xi}\right| \leq |x|\left|\frac{1-\frac{|\xi|}{|x|}}{1-|\xi|}\right| \leq |x|$$

$\Rightarrow |R_{n+1}(x, 0, \xi)| \leq C_\alpha |x|^{n+1}(n+1)^{-\alpha}(1 \pm |x|)^{\alpha-1} \to 0$
$(n \to \infty)$.

Fallunterscheidung

(2) $x = 1$ und $\alpha > -1$: Mit der Langrange-Form

$$R_{n+1}(x,0,\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \binom{\alpha}{n+1}(1+\xi)^{\alpha-1-n}$$

haben wir wegen $\xi > 0$:

$$|R_{n+1}(x,0,\xi)| \leq \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \leq C_\alpha n^{-1-\alpha} \to 0 \ (n \to \infty).$$

Fallunterscheidung

(3) $x = -1$ und $\alpha > 0$: Wir wählen $g(t) = (t-x)^\alpha = (t+1)^\alpha$.
In diesem Fall wird

$$\frac{g(x)-g(0)}{g'(\xi)} = \frac{-1}{\alpha(\xi - x)^{\alpha-1}} = -\frac{(\xi+1)^{1-\alpha}}{\alpha}$$

und also

$$\begin{aligned} R_{n+1}(..) &= -\frac{(\xi+1)^{1-\alpha}}{\alpha}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}(1+\xi)^{\alpha-1-n}(-1-\xi)^n \\ &= (-1)^{n+1}(n+1)\binom{\alpha}{n+1} \simeq (n+1)^{-\alpha} \to 0 \ (n \to \infty), \end{aligned}$$

da $\alpha > 0$.

Damit sind alle drei Fälle vollständig diskutiert.