Analysis I

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/24

5.2 Mittelwertsatz und lokale Extrema

Definition: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Dann hat f in $x_0 \in I$ ein *lokales Maximum (Minimum)*, falls gilt:

Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $f(x_0) \geq f(x)$ (bzw. $f(x_0) \leq f(x)$)

für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap I$.

Bemerkungen:

Bemerkungen:

(1) *Extremum* = Maximum oder Minimum

Bemerkungen:

(1) *Extremum* = Maximum oder Minimum

(2) Man spricht von einem *globalen* Maximum (oder einfach nur von einem Maximum), falls $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in I$; entsprechend von einem (*globalen*) Minimum.

Bemerkungen:

(1) *Extremum* = Maximum oder Minimum

(2) Man spricht von einem *globalen* Maximum (oder einfach nur von einem Maximum), falls $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in I$; entsprechend von einem (*globalen*) Minimum.

(3) Ein lokales Maximum in $x_0 \in I$ heißt *isoliert*, wenn ein $\varepsilon' > 0$ existiert, so dass für alle $x \in I \setminus \{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \varepsilon'$ gilt, dass $f(x_0) > f(x)$. (Hierbei ist ggf. $0 < \varepsilon' < \varepsilon$.) Entsprechend für ein Minimum.

Bemerkungen:

(1) *Extremum* = Maximum oder Minimum

(2) Man spricht von einem *globalen* Maximum (oder einfach nur von einem Maximum), falls $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in I$; entsprechend von einem (*globalen*) Minimum.

(3) Ein lokales Maximum in $x_0 \in I$ heißt *isoliert*, wenn ein $\varepsilon' > 0$ existiert, so dass für alle $x \in I \setminus \{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \varepsilon'$ gilt, dass $f(x_0) > f(x)$. (Hierbei ist ggf. $0 < \varepsilon' < \varepsilon$.) Entsprechend für ein Minimum.

(4) Der Punkt x_0 wird als lokale Maximal-/Minimal- bzw. Extremalstelle bezeichnet. Das ist zu unterscheiden vom lokalen Extremum $f(x_0)$.

Ein notwendiges Kriterium für lokale Extrema

Satz 1: Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in (a, b)$. Besitzt f in x_0 ein lokales Extremum, so ist $f'(x_0) = 0$.

Bemerkung: Das Intervall in Satz 1 ist offen. Für Randextrema gilt die Aussage des Satzes nicht! Beispiel: $f(x) = x$ auf $[0, 1]$.

Der Satz von Rolle

Satz 2: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b), ferner gelte $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$, so dass $f'(\xi) = 0$.

Der Satz von Rolle

Satz 2: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar in (a, b), ferner gelte $f(a) = f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$, so dass $f'(\xi) = 0$.

Der Satz von Rolle ist ein Spezialfall des Mittelwertsatzes (Wichtig!), den wir gleich in allgemeiner Form formulieren und beweisen:

Der allgemeine Mittelwertsatz

Satz 3: Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar in (a, b), und es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$, so dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Der allgemeine Mittelwertsatz

Satz 3: Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar in (a, b), und es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$, so dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Für $f(b) = f(a)$ erhält man den Satz von Rolle als Spezialfall. Für $g(x) = x$ ergibt sich der Mittelwertsatz in seiner üblichen (merkbaren!) Form:

Der Mittelwertsatz

Satz 4: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann exisitert ein $\xi \in (a, b)$, so dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Folgerung 1:

Es seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $a < b$.

Folgerung 1:

Es seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $a < b$.

(1) Ist $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f konstant.

Folgerung 1:

Es seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $a < b$.

(1) Ist $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f konstant.

(2) Sind $f, g : (a, b) \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$, so existiert ein $c \in \mathbb{C}$, so dass $f(x) = g(x) + c$.

Anwendungen

Anwendungen

(1) Charakterisierung der Exponentialfunktion: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion mit $f' = f$ und $f(0) = 1$, so ist $f(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Anwendungen

(1) Charakterisierung der Exponentialfunktion: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion mit $f' = f$ und $f(0) = 1$, so ist $f(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(2) Die Logarithmusreihe: Für $x \in (-1, 1)$ gelten

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad \text{und} \quad \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Folgerung 2 (Monotoniesatz):

Es seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gelten:

Folgerung 2 (Monotoniesatz):

Es seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gelten:

(1) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f in (a, b) streng monoton steigend.

Folgerung 2 (Monotoniesatz):

Es seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gelten:

(1) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f in (a, b) streng monoton steigend.

(2) Genau dann ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$, wenn f in (a, b) monoton steigend ist.

Folgerung 2 (Monotoniesatz):

Es seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gelten:

(1) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f in (a, b) streng monoton steigend.

(2) Genau dann ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$, wenn f in (a, b) monoton steigend ist.

(3) Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f in (a, b) streng monoton fallend.

Folgerung 2 (Monotoniesatz):

Es seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gelten:

(1) Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f in (a, b) streng monoton steigend.

(2) Genau dann ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$, wenn f in (a, b) monoton steigend ist.

(3) Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f in (a, b) streng monoton fallend.

(4) Genau dann ist $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a, b)$, wenn f in (a, b) monoton fallend ist.

Bemerkungen zum Monotoniesatz:

Bemerkungen zum Monotoniesatz:

(1) Die Umkehrungen in (1) und (3) gelten nicht! Bsp.:
$f(x) = \pm x^3$ in $x_0 = 0$.

Bemerkungen zum Monotoniesatz:

(1) Die Umkehrungen in (1) und (3) gelten nicht! Bsp.:
$f(x) = \pm x^3$ in $x_0 = 0$.

(2) Die Anwendung des Mittelwertsatzes im Beweis von (1) zeigt, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ auch die folgende Variante gilt:

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar mit $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) \geq 0$) für alle $x \in (a, b)$, so ist f in $[a, b]$ streng monoton steigend (bzw. monoton steigend).

Beispiel

In einfachen Fällen reicht der Monotoniesatz oft bereits aus, um die Frage nach *globalen* Extrema einer gegebenen Funktion vollständig zu klären.

Bsp.: Die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a > 0$ und $b, c \in \mathbb{R}$ besitzt genau ein globales Minimum in $x_0 = -\frac{b}{2a}$, weitere lokale Extrema existieren nicht.

Folgerung 3 (Schrankensatz):

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$|f'(x)| \leq L \text{ für alle } x \in I.$$

Dann ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L und daher gleichmäßig stetig.

$$\text{Beweis: } |f(x) - f(y)| \overset{(MWS)}{=} |f'(\xi)||x - y| \leq L|x - y|.$$

Folgerung 3 (Schrankensatz):

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$|f'(x)| \leq L \text{ für alle } x \in I.$$

Dann ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L und daher gleichmäßig stetig.

$$\text{Beweis: } |f(x) - f(y)| \overset{(MWS)}{=} |f'(\xi)||x - y| \leq L|x - y|.$$

Beispiel: $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig, da $\arctan'(\xi) = \dfrac{1}{1+\xi^2} \in (0, 1]$.

Zur geometrischen Bedeutung der zweiten Ableitung: Konvexität

Definition: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn für alle $x, y \in I$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \tag{K}$$

f heißt *streng konvex*, wenn (K) mit strikter Ungleichung "$<$" gilt; f heißt (streng) *konkav*, wenn $-f$ (streng) konvex ist.

Geometrische Interpretation

Die Begriffe "konvex" und "konkav" charakterisieren das Krümmungsverhalten des Graphen G_f. Man sagt, G_f sei nach links (rechts) gekrümmt, wenn f konvex (konkav) ist. Bei dieser Sprechweise wird unterstellt, das G_f in Richtung wachsenden Arguments x durchlaufen wird. Die Menge

$$S_{x,y} := \{(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)) : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

ist die Sekante zu G_f durch die Punkte $x, f(x))$ und $(y, f(y))$. Die Ungleichung (K) in der Definition von "konvex" bedeutet geometrisch also die Forderung, dass *alle* Sekanten durch G_f oberhalb dieses Graphen verlaufen. Entsprechend liegen alle Sekanten durch den Graphen einer konkaven Funktion f unterhalb von G_f.

Bezug zur Differenzierbarkeit

Um diesen herzustellen, schreiben wir die Ungleichung (K) etwas um:

Lemma 1: Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist (streng) konvex genau dann, wenn für alle $x < z < y \in I$ gilt

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \underset{(<)}{\leq} \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

Konvexe Funktionen sind am allgemeinen nicht differenzierbar, wie das Beispiel $f(x) = |x|$ zeigt. Wenn wir jedoch die Differenzierbarkeit voraussetzen, erhalten wir:

Lemma 2:

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gelten:

Lemma 2:

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gelten:

(1) f ist konvex genau dann, wenn f' monoton steigend ist.

Lemma 2:

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gelten:

(1) f ist konvex genau dann, wenn f' monoton steigend ist.

(2) f ist streng konvex, wenn f' streng monoton steigend ist.

Konvexitätssatz

In Verbindung mit dem Monotoniesatz - angewendet auf f' - ergibt sich:

Satz 5: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gelten:

Konvexitätssatz

In Verbindung mit dem Monotoniesatz - angewendet auf f' - ergibt sich:

Satz 5: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gelten:

(1) f ist konvex genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ ist für alle $x \in I$,

Konvexitätssatz

In Verbindung mit dem Monotoniesatz - angewendet auf f' - ergibt sich:

Satz 5: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gelten:

(1) f ist konvex genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ ist für alle $x \in I$,

(2) f ist streng konvex, wenn $f''(x) > 0$ ist für alle $x \in I$,

Konvexitätssatz

In Verbindung mit dem Monotoniesatz - angewendet auf f' - ergibt sich:

Satz 5: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gelten:

(1) f ist konvex genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ ist für alle $x \in I$,

(2) f ist streng konvex, wenn $f''(x) > 0$ ist für alle $x \in I$,

(3) f ist konkav genau dann, wenn $f''(x) \leq 0$ ist für alle $x \in I$,

Konvexitätssatz

In Verbindung mit dem Monotoniesatz - angewendet auf f' - ergibt sich:

Satz 5: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gelten:

(1) f ist konvex genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ ist für alle $x \in I$,

(2) f ist streng konvex, wenn $f''(x) > 0$ ist für alle $x \in I$,

(3) f ist konkav genau dann, wenn $f''(x) \leq 0$ ist für alle $x \in I$,

(4) f ist streng konkav, wenn $f''(x) < 0$ ist für alle $x \in I$.

Gegenbeispiel zu $\not\Rightarrow$ in (2): $f(x) = x^4$ in $x_0 = 0$. f ist auf $\mathbb{R}$ streng konvex, aber $f''(0) = 0$.

Anwendung: Youngsche Ungleichung

Die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist zweimal differenzierbar mit $\exp''(x) = \exp(x) > 0$ und also streng konvex auf $\mathbb{R}$. Daraus ergibt sich ein kurzer Beweis der häufig benutzten Youngschen Ungleichung:

Lemma 3: Für $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $a, b \geq 0$ gilt:

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

Beweis: Klar, wenn $ab = 0$. Sonst setzen wir $x = \ln(a)$ und $y = \ln(b)$. Dann ist $ab = e^x e^y = e^{x+y} = \ldots$

$$\ldots = \exp\left(\frac{1}{p} px + \frac{1}{q} qy\right) \leq \frac{1}{p} e^{px} + \frac{1}{q} e^{qy} = \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$