Analysis I

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/24

5 Differenzierbarkeit
5.1 Die Ableitung. Ableitungsregeln

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{C}$ heißt *differenzierbar* in $x_0 \in X$, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

existiert. In diesem Fall heißt $f'(x_0)$ die Ableitung von f in x_0.

f heißt differenzierbar in X, falls f in jedem Punkt $x_0 \in X$ differenzierbar ist.

Bemerkungen:

Bemerkungen:

(1) Beim Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \ldots$ sind nur Folgen mit $x_n \neq x_0$ zugelassen, die Existenz mindestens einer solchen Folge wird vorausgesetzt.

Bemerkungen:

(1) Beim Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \dots$ sind nur Folgen mit $x_n \neq x_0$ zugelassen, die Existenz mindestens einer solchen Folge wird vorausgesetzt.

(2) Mit $h := x - x_0$ ist $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0))$.

Bemerkungen:

(1) Beim Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \dots$ sind nur Folgen mit $x_n \neq x_0$ zugelassen, die Existenz mindestens einer solchen Folge wird vorausgesetzt.

(2) Mit $h := x - x_0$ ist $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0))$.

(3) Weitere Schreibweisen: $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{df}{dx}(x)\Big|_{x=x_0}$.

Bemerkungen:

(1) Beim Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \ldots$ sind nur Folgen mit $x_n \neq x_0$ zugelassen, die Existenz mindestens einer solchen Folge wird vorausgesetzt.

(2) Mit $h := x - x_0$ ist $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0))$.

(3) Weitere Schreibweisen: $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \frac{df}{dx}(x)\Big|_{x=x_0}$.

(4) Der Definitionsbereich X ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Differenzierbarkeit im Komplexen hat sehr viel weitreichendere Konsequenzen und bleibt der Funktionentheorie vorbehalten. Als Zielbereich ist $\mathbb{C}$ hingegen zugelassen.

Weitere Bemerkungen:

Weitere Bemerkungen:

(5) Geometrische Interpretation für reellwertiges f:
$f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente an den Graphen G_f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

Weitere Bemerkungen:

(5) Geometrische Interpretation für reellwertiges f:
$f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente an den Graphen G_f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

(6) Die Differenzierbarkeit in einem Punkt $x_0 \in X$ impliziert die Stetigkeit in x_0.

Höhere Ableitungen

Ist $f : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{C}$ in jedem $x_0 \in X$ differenzierbar, so wird hierdurch eine Funktion

$$f' : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{C}$$

definiert. Diese wird als die Ableitung von f bezeichnet.

Höhere Ableitungen

Ist $f : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{C}$ in jedem $x_0 \in X$ differenzierbar, so wird hierdurch eine Funktion

$$f' : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{C}$$

definiert. Diese wird als die Ableitung von f bezeichnet.

Ist f' wiederum in jedem $x_0 \in X$ differenzierbar, bildet man die 2. Ableitung

$$f'' := (f')' : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{C}$$

und allgemein die n-te Ableitung

$$f^{(n)} := (f^{(n-1)})' : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{C},$$

wobei $f^{(0)} = f$ vereinbart wird.

Der Vektorraum $C^n(X, \mathbb{C})$

Besitzt $f : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{C}$ eine stetige n-te Ableitung, so nennt man f n-mal stetig differenzierbar.

Den Vektorraum aller n-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf X mit Werten in $\mathbb{C}$ bezeichnet man mit $C^n(X, \mathbb{C})$, falls f reellwertig ist, mit $C^n(X, \mathbb{R})$.

Beispiele

Beispiele

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto f(x) = ax + b$ mit festen $a, b \in \mathbb{C}$ ist differenzierbar mit $f'(x) = a$,

Beispiele

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto f(x) = ax + b$ mit festen $a, b \in \mathbb{C}$ ist differenzierbar mit $f'(x) = a$,

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x^n$ mit festem $n \in \mathbb{N}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = nx^{n-1}$,

Beispiele

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto f(x) = ax + b$ mit festen $a, b \in \mathbb{C}$ ist differenzierbar mit $f'(x) = a$,

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x^n$ mit festem $n \in \mathbb{N}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = nx^{n-1}$,

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x| = \begin{cases} x & : \text{ für } x \geq 0 \\ -x & : \text{ für } x \leq 0 \end{cases}.$

Für $x \neq 0$ gilt nach Beispiel (1)

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & : \text{ für } x > 0 \\ -1 & : \text{ für } x < 0 \end{cases}.$$

In $x_0 = 0$ ist f nicht differenzierbar.

Ableitungsregeln

Satz 1: Es seien $f, g : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{C}$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann sind auch $f + g$, λf und fg differenzierbar und es gelten

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \qquad (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

(Linearität der Ableitung) sowie

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(Produktregel). Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, so ist auch $\dfrac{f}{g} : X \to \mathbb{C}$ differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{1}{g(x)^2}\left(f'(x)g(x) - f(x)g'(x)\right)$$

(Quotientenregel).

Anwendungen

Anwendungen

(1) Ist $P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ ein Polynom mit $a_k \in \mathbb{C}$, so ist P auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$P'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d}{dx} x^k = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

(Linearität der Ableitung und Beispiel (2) oben.)

Anwendungen

Anwendungen

(2) Sind $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Polynome, $N = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) = 0\}$, so ist die rationale Funktion

$$R : \mathbb{R} \setminus N \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$$

differenzierbar mit

$$R'(x) = \frac{1}{Q(x)^2}(P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)).$$

Speziell ist $R(x) = x^{-n}$ differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit

$$R'(x) = \frac{1}{x^{2n}}(-nx^{n-1}) = -nx^{-n-1}.$$

Potenzreihen können gliedweise differenziert werden

Satz 2: Ist $P : (-R, R) \to \mathbb{C}$, $x \mapsto P(x)$ gegeben durch eine Potenzreihe $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$, so ist P auf $(-R, R)$ differenzierbar mit

$$P'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Die Potenzreihe $P'(x)$ hat denselben Konvergenzradius R.

Bemerkung: Gilt i. allg. nicht für beliebige Funktionenreihen $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$!

Folgerung: Potenzreihen sind beliebig oft differenzierbar.

Beispiele

Beispiele

(1) Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto f(x) = \exp(\alpha x)$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ ergibt sich $f'(x) = \alpha \exp(\alpha x)$. Speziell ist für $a > 0$: $\dfrac{d}{dx} a^x = \ln(a) a^x$.

Beispiele

(1) Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto f(x) = \exp(\alpha x)$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ ergibt sich $f'(x) = \alpha \exp(\alpha x)$. Speziell ist für $a > 0$: $\dfrac{d}{dx} a^x = \ln(a) a^x$.

(2) Zerlegung von e^{ix} in Real- und Imaginärteil ergibt

$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \text{und} \qquad \sin'(x) = \cos(x).$$

Beispiele

(1) Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto f(x) = \exp(\alpha x)$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ ergibt sich $f'(x) = \alpha \exp(\alpha x)$. Speziell ist für $a > 0$: $\dfrac{d}{dx} a^x = \ln(a) a^x$.

(2) Zerlegung von e^{ix} in Real- und Imaginärteil ergibt

$$\cos'(x) = -\sin(x) \qquad \text{und} \qquad \sin'(x) = \cos(x).$$

(3) In Verbindung mit der Quotientenregel erhalten wir für $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

Weitere Ableitungsregeln: Kettenregel

Satz 3: Gegeben seien Funktionen $f : \mathbb{R} \supset Y \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{R} \supset X \to Y$. g sei in $x_0 \in X$ und f in $y_0 := g(x_0) \in Y$ differenzierbar. Dann ist auch

$$f \circ g : X \to \mathbb{C}$$

in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Weitere Ableitungsregeln: Ableitung der Umkehrfunktion

Satz 4: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. In $x_0 \in I$ sei f differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Weitere Ableitungsregeln: Ableitung der Umkehrfunktion

Satz 4: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. In $x_0 \in I$ sei f differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar, und es gilt

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Bemerkungen:

(1) Herleitung der Ableitungsformel aus der Kettenregel:
$x = f^{-1}(f(x)) \Rightarrow 1 = (f^{-1})'(f(x))f'(x)$. Dividiere durch $f'(x)$!

(2) In den Anwendungen: $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Beispiele zu den Sätzen 3 und 4

Beispiele zu den Sätzen 3 und 4

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei differenzierbar, $h(x) = f(ax + b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
Dann ist auch h differenzierbar mit $h'(x) = f'(ax + b)a$.
(Satz 3) Speziell: $\frac{d}{dx}(ax + b)^n = na(ax + b)^{n-1}$.
Nicht ausmultiplizieren!

Beispiele zu den Sätzen 3 und 4

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei differenzierbar, $h(x) = f(ax + b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
Dann ist auch h differenzierbar mit $h'(x) = f'(ax + b)a$.
(Satz 3) Speziell: $\frac{d}{dx}(ax + b)^n = na(ax + b)^{n-1}$.
Nicht ausmultiplizieren!

(2) $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert als Umkehrfunktion der exp-Funktion. Anwendung von Satz 4 mit $f = \exp$ bzw. $f^{-1} = \ln$ ergibt:

$$\ln' x = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

Beispiele zu den Sätzen 3 und 4

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei differenzierbar, $h(x) = f(ax+b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist auch h differenzierbar mit $h'(x) = f'(ax+b)a$. (Satz 3) Speziell: $\frac{d}{dx}(ax+b)^n = na(ax+b)^{n-1}$. Nicht ausmultiplizieren!

(2) $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist definiert als Umkehrfunktion der exp-Funktion. Anwendung von Satz 4 mit $f = \exp$ bzw. $f^{-1} = \ln$ ergibt:

$$\ln' x = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

(3) Ableitung des $\arcsin : (-1, 1) \to \mathbb{R}$:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Weitere Beispiele zu den Sätzen 3 und 4

Weitere Beispiele zu den Sätzen 3 und 4

(4) Ableitung des $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Weitere Beispiele zu den Sätzen 3 und 4

(4) Ableitung des $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

(5) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \exp(\alpha \ln(x)) \overset{(2)}{=} \exp(\alpha \ln(x)) \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$