Analysis I

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/24

4.3 Logarithmus und allgemeine Potenz. Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Lemma 1: Die Funktion $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ hat die folgenden Eigenschaften:

4.3 Logarithmus und allgemeine Potenz. Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Lemma 1: Die Funktion $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ hat die folgenden Eigenschaften:

(1) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, $\exp(0) = 1$, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,

4.3 Logarithmus und allgemeine Potenz. Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Lemma 1: Die Funktion $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ hat die folgenden Eigenschaften:

(1) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, $\exp(0) = 1$, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,

(2) exp ist stetig und streng monoton steigend,

4.3 Logarithmus und allgemeine Potenz. Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Lemma 1: Die Funktion $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ hat die folgenden Eigenschaften:

(1) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, $\exp(0) = 1$, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,

(2) exp ist stetig und streng monoton steigend,

(3) Für $p \in \mathbb{N}_0$ ist $\lim_{x\to\infty} x^{-p} \exp(x) = \infty$ und

4.3 Logarithmus und allgemeine Potenz. Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Lemma 1: Die Funktion $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ hat die folgenden Eigenschaften:

(1) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, $\exp(0) = 1$, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,

(2) exp ist stetig und streng monoton steigend,

(3) Für $p \in \mathbb{N}_0$ ist $\lim_{x\to\infty} x^{-p}\exp(x) = \infty$ und

(4) $\lim_{x\to\infty} x^p \exp(-x) = 0$,

4.3 Logarithmus und allgemeine Potenz. Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Lemma 1: Die Funktion $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ hat die folgenden Eigenschaften:

(1) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, $\exp(0) = 1$, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$,

(2) exp ist stetig und streng monoton steigend,

(3) Für $p \in \mathbb{N}_0$ ist $\lim_{x\to\infty} x^{-p}\exp(x) = \infty$ und

(4) $\lim_{x\to\infty} x^p \exp(-x) = 0$,

(5) $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist bijektiv.

Der natürliche Logarithmus

Satz 4 des vorigen Abschnitts ergibt die Existenz einer stetigen und streng monoton steigenden Umkehrfunktion:

Definition: Die Umkehrfunktion

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \to \ln(x)$$

der (reellen) Exponentialfunktion wird als *natürlicher Logarithmus* (logarithmus naturalis) bezeichnet.

Lemma 2: Eigenschaften des Logarithmus

Lemma 2: Eigenschaften des Logarithmus

(1) Die Funktion $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$ ist stetig, streng monoton steigend und bijektiv. Insbesondere gelten

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty.$$

Lemma 2: Eigenschaften des Logarithmus

(1) Die Funktion $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$ ist stetig, streng monoton steigend und bijektiv. Insbesondere gelten

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty.$$

(2) Für alle $x, y > 0$ gilt die Funktionalgleichung

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y),$$

insbesondere ist $\ln(1) = 0$ und $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

Lemma 2: Eigenschaften des Logarithmus

(1) Die Funktion $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$ ist stetig, streng monoton steigend und bijektiv. Insbesondere gelten

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty.$$

(2) Für alle $x, y > 0$ gilt die Funktionalgleichung

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y),$$

insbesondere ist $\ln(1) = 0$ und $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.

(3) Für jedes $p \in \mathbb{N}$ ist

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \sqrt[p]{y} \ln(y) = \lim_{y \to \infty} \frac{\ln(y)}{\sqrt[p]{y}} = 0.$$

Exponentialfunktion mit beliebiger positiver Basis

Definition: Für $a > 0$ heißt die Funktion

$$\exp_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto a^z := \exp\left(z \ln\left(a\right)\right)$$

die *Exponentialfunktion zur Basis a*.

Diese Funktion ist stetig und es gelten die folgenden

Rechenregeln

Lemma 3: Es seien $a, b > 0$, $x \in \mathbb{R}$ und $z, w \in \mathbb{C}$. Dann ist

Rechenregeln

Lemma 3: Es seien $a, b > 0$, $x \in \mathbb{R}$ und $z, w \in \mathbb{C}$. Dann ist

(1) $a^{z+w} = a^z a^w$,

Rechenregeln

Lemma 3: Es seien $a, b > 0$, $x \in \mathbb{R}$ und $z, w \in \mathbb{C}$. Dann ist

(1) $a^{z+w} = a^z a^w$,

(2) $(a^x)^z = a^{xz}$,

Rechenregeln

Lemma 3: Es seien $a, b > 0$, $x \in \mathbb{R}$ und $z, w \in \mathbb{C}$. Dann ist

(1) $a^{z+w} = a^z a^w$,

(2) $(a^x)^z = a^{xz}$,

(3) $a^{-z} = \dfrac{1}{a^z} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^z$,

Rechenregeln

Lemma 3: Es seien $a, b > 0$, $x \in \mathbb{R}$ und $z, w \in \mathbb{C}$. Dann ist

(1) $a^{z+w} = a^z a^w$,

(2) $(a^x)^z = a^{xz}$,

(3) $a^{-z} = \dfrac{1}{a^z} = \left(\dfrac{1}{a}\right)^z$,

(4) $(ab)^z = a^z b^z$.

Logarithmus zur Basis $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$

Für $a \in (1,\infty)$ ist die Einschränkung der Exponentialfunktion zur Basis a auf die reelle Achse, das ist die Abbildung

$$\exp_a : \mathbb{R} \to (0,\infty),\ x \mapsto a^x = \exp(x \ln(a)),$$

streng monoton steigend, stetig und bijektiv. Im Fall $a \in (0,1)$ ist $\ln(a) < 0$ und dementsprechend $\exp_a$ streng monoton fallend, stetig und bijektiv. In beiden Fällen existiert eine stetige und in gleicher Weise streng monotone Umkehrfunktion

$$\log_a : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Die letzte Identität ergibt sich durch Auflösung der Gleichung $y = a^x = \exp(x \ln(a))$ nach x. (Gebräuchlich sind $a = 2$ - dyadischer - und $a = 10$ - dekadischer Logarithmus. Bsp.: $\log_2(1024) = 10$, $\log_{10}(1000) = 3$.)

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Satz 1 (und Definition): Die Funktionen

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Satz 1 (und Definition): Die Funktionen

(1) $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$,

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Satz 1 (und Definition): Die Funktionen

(1) $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$,

(2) $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$,

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Satz 1 (und Definition): Die Funktionen

(1) $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$,

(2) $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$,

(3) $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$,

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Satz 1 (und Definition): Die Funktionen

(1) $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$,

(2) $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$,

(3) $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$,

(4) $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$,

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Satz 1 (und Definition): Die Funktionen

(1) $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$,
(2) $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$,
(3) $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$,
(4) $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$,

sind streng monoton fallend (steigend, steigend, fallend), stetig und bijektiv. Ihre Umkehrfunktionen

(1) $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$,

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Satz 1 (und Definition): Die Funktionen

(1) $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$,
(2) $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$,
(3) $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$,
(4) $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$,

sind streng monoton fallend (steigend, steigend, fallend), stetig und bijektiv. Ihre Umkehrfunktionen

(1) $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$,
(2) $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Satz 1 (und Definition): Die Funktionen

(1) $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$,
(2) $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$,
(3) $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$,
(4) $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$,

sind streng monoton fallend (steigend, steigend, fallend), stetig und bijektiv. Ihre Umkehrfunktionen

(1) $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$,
(2) $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
(3) $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Satz 1 (und Definition): Die Funktionen

(1) $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$,
(2) $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$,
(3) $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$,
(4) $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$,

sind streng monoton fallend (steigend, steigend, fallend), stetig und bijektiv. Ihre Umkehrfunktionen

(1) $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$,
(2) $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
(3) $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
(4) $\text{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Satz 1 (und Definition): Die Funktionen

(1) $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$,
(2) $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$,
(3) $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$,
(4) $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$,

sind streng monoton fallend (steigend, steigend, fallend), stetig und bijektiv. Ihre Umkehrfunktionen

(1) $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$,
(2) $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
(3) $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
(4) $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$

sind ebenfalls stetig, bijektiv und haben dasselbe Monotonieverhalten.

Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen

Satz 2: Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ besitzt eine Darstellung

$z = re^{i\varphi}$ mit $r = |z|$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Hierbei ist φ bis auf Addition

eines ganzzahligen Vielfachen von 2π eindeutig bestimmt.