Analysis I

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/24

4.2 Sätze über stetige reellwertige Funktionen

Lemma 1: Jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Maximum und ein Minimum.

4.2 Sätze über stetige reellwertige Funktionen

Lemma 1: Jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Maximum und ein Minimum.

Zusammen mit dem Satz 4 des letzten Abschnitts ergibt Lemma 1:

Satz 1 (vom Maximum und Minimum): Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f ein Maximum und ein Minimum an, d. h. es existieren $z_1, z_2 \in K$, so dass

$$f(z_1) \leq f(z) \leq f(z_2)$$

für alle $z \in K$.

Bezeichnung: In diesem Fall heißt z_2 eine Maximalstelle und z_1 eine Minimalstelle von f.

Der Zwischenwertsatz (ZWS)

Satz 2: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < c < f(b)$. Dann

existiert ein $\xi \in (a, b)$, so dass $f(\xi) = c$.

Der Zwischenwertsatz (ZWS)

Satz 2: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < c < f(b)$. Dann

existiert ein $\xi \in (a, b)$, so dass $f(\xi) = c$.

Folgerung: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) > c > f(b)$, so existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = c$.

(Wende Satz 2 an auf $\tilde{f} = -f$.)

Anwendung: Nullstellen und Periodizität der trigonometrischen Funktionen

Satz 3: Die Funktion $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x)$ besitzt im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle.

Anwendung: Nullstellen und Periodizität der trigonometrischen Funktionen

Satz 3: Die Funktion $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x)$ besitzt im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle.

Zur Vorbereitung benötigen wir:

Lemma 2: Für $x \in (0, 2]$ gelten

(1) $\cos(x) < 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$, insbesondere ist $\cos(2) < -\dfrac{1}{3}$.

Anwendung: Nullstellen und Periodizität der trigonometrischen Funktionen

Satz 3: Die Funktion $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x)$ besitzt im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle.

Zur Vorbereitung benötigen wir:

Lemma 2: Für $x \in (0, 2]$ gelten

(1) $\cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, insbesondere ist $\cos(2) < -\frac{1}{3}$.

(2) $\sin(x) > x - \frac{x^3}{6} > 0$.

Anwendung: Nullstellen und Periodizität der trigonometrischen Funktionen

Satz 3: Die Funktion $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x)$ besitzt im Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle.

Zur Vorbereitung benötigen wir:

Lemma 2: Für $x \in (0, 2]$ gelten

(1) $\cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, insbesondere ist $\cos(2) < -\frac{1}{3}$.

(2) $\sin(x) > x - \frac{x^3}{6} > 0$.

Folgerung: Wegen $\cos(0) = 1$ und $\cos(2) < -\frac{1}{3}$ existiert nach dem ZWS ein $\xi \in (0, 2)$ mit $\cos(\xi) = 0$.

Monotonie und Eindeutigkeit

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{R}$ heißt

Monotonie und Eindeutigkeit

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{R}$ heißt

(1) monoton steigend $:\Leftrightarrow$ Aus $x < y$ folgt $f(x) \leq f(y)$,

Monotonie und Eindeutigkeit

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{R}$ heißt

(1) monoton steigend $:\Leftrightarrow$ Aus $x < y$ folgt $f(x) \leq f(y)$,

(2) streng monoton steigend $:\Leftrightarrow$ Aus $x < y$ folgt $f(x) < f(y)$,

Monotonie und Eindeutigkeit

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{R}$ heißt

(1) monoton steigend $:\Leftrightarrow$ Aus $x < y$ folgt $f(x) \leq f(y)$,

(2) streng monoton steigend $:\Leftrightarrow$ Aus $x < y$ folgt $f(x) < f(y)$,

(3) (streng) monoton fallend $:\Leftrightarrow$ $-f$ ist (streng) monoton steigend.

Bemerkungen und Beispiele

Bemerkungen und Beispiele

(1) Ist f streng monoton, so ist f injektiv.

Bemerkungen und Beispiele

(1) Ist f streng monoton, so ist f injektiv.

(2) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x)$ ist streng monoton steigend.

Bemerkungen und Beispiele

(1) Ist f streng monoton, so ist f injektiv.

(2) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x)$ ist streng monoton steigend.

(3) $\cos : [0, 2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x)$ ist streng monoton fallend.

Bemerkungen und Beispiele

(1) Ist f streng monoton, so ist f injektiv.

(2) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x)$ ist streng monoton steigend.

(3) $\cos : [0, 2] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \cos(x)$ ist streng monoton fallend.

Folgerung: Mit (1) und (3) ist auch die Eindeutigkeit der Nullstelle in Satz 3 bewiesen.

Definition: Wir definieren $\frac{\pi}{2}$ als die eindeutig bestimmte Nullstelle von $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)$ im Intervall $[0, 2]$.

Wertetabelle

$f(x) \setminus x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\exp(ix)$	1	i	-1	$-i$	1
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1

Weitere Folgerungen: (1) Periodizität

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten

Weitere Folgerungen: (1) Periodizität

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten

(1) $\exp(z \pm \frac{i\pi}{2}) = \pm i \exp(z)$, $\exp(z \pm i\pi) = -\exp(z)$

sowie $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$, d.h: exp ist $2\pi i$ - periodisch,

Weitere Folgerungen: (1) Periodizität

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten

(1) $\exp(z \pm \frac{i\pi}{2}) = \pm i \exp(z)$, $\exp(z \pm i\pi) = -\exp(z)$

sowie $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$, d.h: exp ist $2\pi i$ - periodisch,

(2) $\cos(z + \frac{\pi}{2}) = -\sin(z)$, $\cos(z + \pi) = -\cos(z)$,

$\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$, cos ist 2π - periodisch,

Weitere Folgerungen: (1) Periodizität

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten

(1) $\exp(z \pm \frac{i\pi}{2}) = \pm i \exp(z)$, $\exp(z \pm i\pi) = -\exp(z)$

sowie $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$, d.h: exp ist $2\pi i$ - periodisch,

(2) $\cos(z + \frac{\pi}{2}) = -\sin(z)$, $\cos(z + \pi) = -\cos(z)$,

$\cos(z + 2\pi) = \cos(z)$, cos ist 2π - periodisch,

(3) $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos(z)$, $\sin(z + \pi) = -\sin(z)$,

$\sin(z + 2\pi) = \sin(z)$, sin ist 2π - periodisch.

Weitere Folgerungen: (2) Nullstellen

Weitere Folgerungen: (2) Nullstellen

(1) $\{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\},$

Weitere Folgerungen: (2) Nullstellen

(1) $\{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\},$

(2) $\{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$

Weitere Folgerungen: (2) Nullstellen

(1) $\{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$,

(2) $\{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Bemerkung: Auch in $\mathbb{C}$ gibt es keine weiteren Nullstellen von sin und cos.

Definition: Tangens und Cotangens

Die Kenntnis der Nullstellen von sin und cos ermöglicht die Definition der Tangens- und Cotangensfunktion:

Definition: Tangens und Cotangens

Die Kenntnis der Nullstellen von sin und cos ermöglicht die Definition der Tangens- und Cotangensfunktion:

(1) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ setzen wir

$$\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)},$$

Definition: Tangens und Cotangens

Die Kenntnis der Nullstellen von sin und cos ermöglicht die Definition der Tangens- und Cotangensfunktion:

(1) Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ setzen wir

$$\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)},$$

(2) für $z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ definiert man

$$\cot(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)}.$$

Stetigkeit der Umkehrfunktion einer streng monotonen, stetigen Funktion

Satz 4: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig. Dann ist auch $J := f(I)$ ein Intervall, und die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : J \to I$$

ist in gleicher Weise streng monoton und stetig.

Bemerkungen und Beispiele

Bemerkungen und Beispiele

(1) Die Stetigkeit der Umkehrfunktion in Satz 4 beruht auf der Monotonie von f und damit auf der Anordnung von $\mathbb{R}$. Im Allgemeinen ist die Umkehrfunktion einer stetigen Funktion *nicht* stetig:

$$f : [0, 2\pi) \to S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},\ x \to f(x) := e^{ix}$$

ist stetig und bijektiv - wir werden in Kürze sehen, dass es zu jeder Zahl $z \in S^1$ eine Darstellung $z = e^{ix}$ mit $x \in \mathbb{R}$ gibt. Aber die Inverse

$$f^{-1} : S^1 \to [0, 2\pi),\ e^{ix} \mapsto f^{-1}(e^{ix}) := x$$

ist unstetig in $z_0 = 1 = e^{i0}$, denn in jeder Umgebung von z_0 gibt es $z \in S^1$ mit $f^{-1}(z) \geq \pi$.

Bemerkungen und Beispiele

(2) Die Existenz p - ter Wurzeln zu einer natürlichen Zahl p hatten wir konstruktiv durch das “babylonische Wurzelziehen” gewonnen:

$$x_{n+1} := \frac{1}{p}\left((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right).$$

Satz 4 liefert einen weiteren Existenzbeweis: Die Funktion

$$f : [0,\infty) \to [0,\infty),\ x \mapsto f(x) := x^p$$

ist stetig, streng monoton steigend und surjektiv (beachte: $f(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ sowie ZWS!). Die durch Satz 4 garantierte Umkehrfunktion ist gerade die p - te Wurzel: $f^{-1}(y) = \sqrt[p]{y}$.