

Analysis I

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/24

4 Stetige Funktionen

Hier betrachten wir Funktionen im engeren Sinne, d.h.: Ihre Definitions- und Zielbereiche werden als Teilmengen der komplexen Ebene angenommen, also $X, Y \subset \mathbb{C}$.

Stetigkeit ist ein zentraler Begriff der Analysis. Viele Existenzfragen lassen sich erst und allein mit Hilfe des Konzepts der Stetigkeit klären, z. B.

4 Stetige Funktionen

Hier betrachten wir Funktionen im engeren Sinne, d.h.: Ihre Definitions- und Zielbereiche werden als Teilmengen der komplexen Ebene angenommen, also $X, Y \subset \mathbb{C}$.

Stetigkeit ist ein zentraler Begriff der Analysis. Viele Existenzfragen lassen sich erst und allein mit Hilfe des Konzepts der Stetigkeit klären, z. B.

- ▶ Existenz von Nullstellen, etwa: Gibt es $z \in \mathbb{C}$ mit $\cos(z) = 0$?
Oder mit $P(z) = 0$, wenn P ein Polynom höheren Grades ist?

4 Stetige Funktionen

Hier betrachten wir Funktionen im engeren Sinne, d.h.: Ihre Definitions- und Zielbereiche werden als Teilmengen der komplexen Ebene angenommen, also $X, Y \subset \mathbb{C}$.

Stetigkeit ist ein zentraler Begriff der Analysis. Viele Existenzfragen lassen sich erst und allein mit Hilfe des Konzepts der Stetigkeit klären, z. B.

- ▶ Existenz von Nullstellen, etwa: Gibt es $z \in \mathbb{C}$ mit $\cos(z) = 0$? Oder mit $P(z) = 0$, wenn P ein Polynom höheren Grades ist?
- ▶ Existenz von Fixpunkten: Das sind Lösungen der Gleichung $f(z) = z$. Durch Betrachtung von $g(z) = f(z) - z$ wird dies auf die Frage nach den Nullstellen zurückgeführt.

4 Stetige Funktionen

Hier betrachten wir Funktionen im engeren Sinne, d.h.: Ihre Definitions- und Zielbereiche werden als Teilmengen der komplexen Ebene angenommen, also $X, Y \subset \mathbb{C}$.

Stetigkeit ist ein zentraler Begriff der Analysis. Viele Existenzfragen lassen sich erst und allein mit Hilfe des Konzepts der Stetigkeit klären, z. B.

- ▶ Existenz von Nullstellen, etwa: Gibt es $z \in \mathbb{C}$ mit $\cos(z) = 0$? Oder mit $P(z) = 0$, wenn P ein Polynom höheren Grades ist?
- ▶ Existenz von Fixpunkten: Das sind Lösungen der Gleichung $f(z) = z$. Durch Betrachtung von $g(z) = f(z) - z$ wird dies auf die Frage nach den Nullstellen zurückgeführt.
- ▶ Existenz von Lösungen gewisser Optimierungsaufgaben. Diese folgt in vielen Fällen aus der Stetigkeit der zu optimierenden Funktion.

4.1 Punktweise und gleichmäßige Stetigkeit: Definitionen und Folgenkriterien

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{C} \supset X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stetig* im Punkt $x_0 \in X$, wenn gilt:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

f heißt stetig in X , wenn f in jedem $x_0 \in X$ stetig ist.

ε - Umgebung

Definition: Es seien $\varepsilon > 0$, $X \subset \mathbb{C}$ und $x_0 \in X$. Dann heißt

$$U_\varepsilon(x_0) := \{z \in X : |z - x_0| < \varepsilon\}$$

eine ε - Umgebung von x_0 in X .

ε - Umgebung

Definition: Es seien $\varepsilon > 0$, $X \subset \mathbb{C}$ und $x_0 \in X$. Dann heißt

$$U_\varepsilon(x_0) := \{z \in X : |z - x_0| < \varepsilon\}$$

eine ε - Umgebung von x_0 in X .

Damit lautet die definierende Eigenschaft der Stetigkeit einer Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ in $x_0 \in X$:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass $f(U_\delta(x_0)) \subset U_\varepsilon(f(x_0))$.

Beispiele

Beispiele

- (1) Sind $a, b \in \mathbb{C}$ fest, so heißt $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = az + b$ eine *affin-lineare* Funktion. Solche Funktionen sind auf ganz \mathbb{C} stetig.

Beispiele

- (1) Sind $a, b \in \mathbb{C}$ fest, so heißt $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = az + b$ eine *affin-lineare* Funktion. Solche Funktionen sind auf ganz \mathbb{C} stetig.
- (2) Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = z^2$ und $x_0 \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann ist f stetig in x_0 .

Beispiele

- (1) Sind $a, b \in \mathbb{C}$ fest, so heißt $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = az + b$ eine *affin-lineare* Funktion. Solche Funktionen sind auf ganz \mathbb{C} stetig.
- (2) Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = z^2$ und $x_0 \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann ist f stetig in x_0 .

Beachte: Die Wahl von δ in (1) ist unabhängig von x_0 . Dies ist in (2) nicht mehr möglich.

Beispiele

- (1) Sind $a, b \in \mathbb{C}$ fest, so heißt $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = az + b$ eine *affin-lineare* Funktion. Solche Funktionen sind auf ganz \mathbb{C} stetig.
- (2) Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = z^2$ und $x_0 \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann ist f stetig in x_0 .

Beachte: Die Wahl von δ in (1) ist unabhängig von x_0 . Dies ist in (2) nicht mehr möglich.

Die folgenden Beispiele zeigen die Möglichkeiten einer Funktion, in einem speziellen Punkt unstetig zu sein:

Weitere Beispiele

Weitere Beispiele

$$(3) f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z) := \begin{cases} 1 & : \text{für } z = 0 \\ 0 & : \text{für } z \neq 0 \end{cases} .$$

Diese Funktion hat in $x_0 = 0$ eine sogenannte *hebbare* Unstetigkeit, das heißt durch Abänderung in einem Punkt erhält man eine stetige Funktion.

Weitere Beispiele

$$(3) f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z) := \begin{cases} 1 & : \text{für } z = 0 \\ 0 & : \text{für } z \neq 0 \end{cases} .$$

Diese Funktion hat in $x_0 = 0$ eine sogenannte *hebbare* Unstetigkeit, das heißt durch Abänderung in einem Punkt erhält man eine stetige Funktion.

$$(4) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \begin{cases} x & : \text{für } x \leq 0 \\ x + 1 & : \text{für } x > 0 \end{cases} .$$

Hier liegt eine Unstetigkeit in $x_0 = 0$ vor, die als *Sprungstelle* bezeichnet wird.

Noch mehr Beispiele

Noch mehr Beispiele

$$(5) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \begin{cases} 0 & : \text{für } x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & : \text{für } x \neq 0 \end{cases} .$$

Hier liegt im Nullpunkt eine sogenannte wesentliche Unstetigkeitsstelle vor, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\pm \frac{1}{n}\right)$ existiert nicht.

Noch mehr Beispiele

$$(5) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \begin{cases} 0 & : \text{für } x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & : \text{für } x \neq 0 \end{cases} .$$

Hier liegt im Nullpunkt eine sogenannte wesentliche Unstetigkeitsstelle vor, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\pm \frac{1}{n}\right)$ existiert nicht.

$$(6) f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z) := \begin{cases} 0 & : \text{für } z = 0 \\ \frac{1}{z} & : \text{für } z \neq 0 \end{cases}$$

ist unstetig im Nullpunkt. Hier liegt eine sogenannte "Unendlichkeitsstelle" vor.

Zur Abhängigkeit vom Definitionsbereich

Die Stetigkeit einer Funktion hängt nicht nur von der Zuordnungsvorschrift ab sondern wird auch wesentlich bestimmt durch den Definitionsbereich. So ist z.B. *jede* Funktion

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

stetig (wähle $\delta = \frac{1}{2}$). Noch überraschender ist vielleicht das folgende Beispiel:

Zur Abhängigkeit vom Definitionsbereich

Die Stetigkeit einer Funktion hängt nicht nur von der Zuordnungsvorschrift ab sondern wird auch wesentlich bestimmt durch den Definitionsbereich. So ist z.B. *jede* Funktion

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

stetig (wähle $\delta = \frac{1}{2}$). Noch überraschender ist vielleicht das folgende Beispiel:

$$(7) \quad f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto f(x) := \begin{cases} 1 & : \text{für } x > \sqrt{2} \\ 0 & : \text{für } x < \sqrt{2} \end{cases}$$

Diese Funktion ist stetig in jedem $x_0 \in \mathbb{Q}$. Wählen wir nämlich $\delta = |x_0 - \sqrt{2}|$, so ist $|f(x) - f(x_0)| = 0$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ mit $|x - x_0| < \delta$. Die Stetigkeitsbedingung ist also erfüllt.

Dirichlets Monster

Die Funktionen in den Beispielen (3) bis (6) waren alle nur an einem einzelnen Punkt unstetig. Das ist keineswegs typisch:

Dirichlets Monster

Die Funktionen in den Beispielen (3) bis (6) waren alle nur in einem einzelnen Punkt unstetig. Das ist keineswegs typisch:

$$(8) f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \begin{cases} 1 & : \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & : \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in keinem Punkt des Definitionsbereichs stetig.

Begründung: Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ fixiert und $\varepsilon = \frac{1}{2}$ vorgegeben, so befindet sich in jedem Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ein x mit $|f(x) - f(x_0)| = 1 > \varepsilon$. (\mathbb{Q} und auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ liegen dicht in \mathbb{R} .)

Gleichmäßige Stetigkeit

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{C} \supset X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ für alle $z, w \in X$ mit $|z - w| < \delta$.

Gleichmäßige Stetigkeit

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{C} \supset X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$ für alle $z, w \in X$ mit $|z - w| < \delta$.

Die affin-lineare Funktion aus (1) ist also gleichmäßig stetig, die auf ganz \mathbb{C} definierte Funktion $f(z) = z^2$ nicht. Eine Klasse gleichmäßig stetiger Funktionen ist die folgende:

Hölder - Stetigkeit

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{C} \supset X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt (global) *Hölder - stetig* zum Exponenten $\alpha \in (0, 1]$, wenn eine Konstante $L \geq 0$ existiert, so dass für alle $z, w \in X$ die Ungleichung

$$|f(z) - f(w)| \leq L|z - w|^\alpha$$

gilt.

Bemerkungen:

- (1) Die Konstante L in der Definition wird als *Lipschitz-Konstante* bezeichnet.

Bemerkungen:

- (1) Die Konstante L in der Definition wird als *Lipschitz-Konstante* bezeichnet.
- (2) Für $\alpha = 1$ spricht von (globaler) *Lipschitz-Stetigkeit*.

Bemerkungen:

- (1) Die Konstante L in der Definition wird als *Lipschitz-Konstante* bezeichnet.
- (2) Für $\alpha = 1$ spricht von (globaler) *Lipschitz-Stetigkeit*.
- (3) Jede (global) Hölder-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.
Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ wählt man

$$\delta = \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Bemerkungen:

- (1) Die Konstante L in der Definition wird als *Lipschitz-Konstante* bezeichnet.
- (2) Für $\alpha = 1$ spricht von (globaler) *Lipschitz-Stetigkeit*.
- (3) Jede (global) Hölder-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.
Beweis: Zu $\varepsilon > 0$ wählt man

$$\delta = \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

- (4) Beispiele: Affin-lineare Funktionen; $f(z) = \bar{z}$; $f(z) = \operatorname{Re}(z)$;
 $f(z) = \operatorname{Im}(z)$; $f(z) = |z|$, für letzteres beachte man
 $||z| - |w|| \leq |z - w|.$

Satz 1:

Es sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist

$$P : K_R(0) \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto P(z)$$

stetig und die Einschränkung

$$P|_{\overline{K_r(0)}} : \underbrace{\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}}_{=: \overline{K_r(0)}} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto P(z)$$

für jedes $r \in [0, R)$ Lipschitz- und damit gleichmäßig stetig.

Satz 1:

Es sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann ist

$$P : K_R(0) \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto P(z)$$

stetig und die Einschränkung

$$P|_{\overline{K_r(0)}} : \underbrace{\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}}_{=: \overline{K_r(0)}} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto P(z)$$

für jedes $r \in [0, R)$ Lipschitz- und damit gleichmäßig stetig.

Folgerung: Die Funktionen $\exp, \sin, \cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sind stetig, ebenso Polynome $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Bemerkung und Übungsaufgabe:

Die $\varepsilon - \delta$ - Definition der Stetigkeit ist wichtig für Beweis Zwecke. Sie lässt sich gut handhaben bei Hölder-stetigen Funktionen. Der Beweis der Stetigkeit der rationalen Funktionen mit ε und δ erweist sich hingegen bereits in einfachen Fällen als recht mühsam.

Bemerkung und Übungsaufgabe:

Die $\varepsilon - \delta$ - Definition der Stetigkeit ist wichtig für Beweiszwecke. Sie lässt sich gut handhaben bei Hölder-stetigen Funktionen. Der Beweis der Stetigkeit der rationalen Funktionen mit ε und δ erweist sich hingegen bereits in einfachen Fällen als recht mühsam.

Eine häufig gestellte Übungsaufgabe: Man zeige mit der $\varepsilon - \delta$ - Definition, dass die Funktion

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z) = \frac{1}{z}$$

stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

Bemerkung und Übungsaufgabe:

Die $\varepsilon - \delta$ - Definition der Stetigkeit ist wichtig für Beweiszwecke. Sie lässt sich gut handhaben bei Hölder-stetigen Funktionen. Der Beweis der Stetigkeit der rationalen Funktionen mit ε und δ erweist sich hingegen bereits in einfachen Fällen als recht mühsam.

Eine häufig gestellte Übungsaufgabe: Man zeige mit der $\varepsilon - \delta$ - Definition, dass die Funktion

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z) = \frac{1}{z}$$

stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

In solchen Fällen ist es einfacher, das nachstehende Folgenkriterium für die Stetigkeit zu verwenden:

Satz 2:

Eine Funktion $f : \mathbb{C} \supset X \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann stetig in $x_0 \in X$, wenn für alle Folgen (x_n) in X mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

gilt, dass auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Folgerungen:

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte ergeben sich:

- (1) Sind $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, so sind auch $\lambda f + \mu g$ und fg stetig.

Folgerungen:

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte ergeben sich:

- (1) Sind $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, so sind auch $\lambda f + \mu g$ und fg stetig.
- (2) Sind $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $N = \{z \in X : g(z) = 0\}$, so ist auch $\frac{f}{g} : X \setminus N \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Insbesondere sind alle rationalen Funktionen stetig in ihrem Definitionsbereich.

Folgerungen:

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte ergeben sich:

- (1) Sind $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, so sind auch $\lambda f + \mu g$ und fg stetig.
- (2) Sind $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $N = \{z \in X : g(z) = 0\}$, so ist auch $\frac{f}{g} : X \setminus N \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Insbesondere sind alle rationalen Funktionen stetig in ihrem Definitionsbereich.
- (3) Sind $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : X \rightarrow Y$ stetig, so ist auch die Verknüpfung $f \circ g : X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Folgenkriterium für die gleichmäßige Stetigkeit

Satz 3: Eine Funktion $f : \mathbb{C} \supset X \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn für alle Folgenpaare (x_n) und (y_n) in X mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n - y_n = 0$$

gilt, dass auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) - f(y_n) = 0.$$

Anwendungen:

(1) $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z}$ ist *nicht* gleichmäßig stetig.

Anwendungen:

(1) $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z}$ ist *nicht* gleichmäßig stetig.

(2) $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x) := \begin{cases} 1 & : \text{für } x > \sqrt{2} \\ 0 & : \text{für } x < \sqrt{2} \end{cases}$

(vgl. Bsp. (7) oben) ist ebenfalls *nicht* gleichmäßig stetig.

Anwendungen:

(1) $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z}$ ist *nicht* gleichmäßig stetig.

(2) $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x) := \begin{cases} 1 & : \text{für } x > \sqrt{2} \\ 0 & : \text{für } x < \sqrt{2} \end{cases}$

(vgl. Bsp. (7) oben) ist ebenfalls *nicht* gleichmäßig stetig.

Diese Beispiele zeigen, dass die gleichmäßige Stetigkeit im Allgemeinen eine echt stärkere Eigenschaft ist als die bloße Stetigkeit. Unter einer bestimmten Voraussetzung an den Definitionsbereich fallen jedoch beide Begriffe zusammen:

Definition: Abgeschlossenheit und Kompaktheit

- (1) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen*, falls für jede konvergente Folge (x_n) in A mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{C}$ bereits gilt, dass $a \in A$ ist.

Definition: Abgeschlossenheit und Kompaktheit

- (1) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen*, falls für jede konvergente Folge (x_n) in A mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{C}$ bereits gilt, dass $a \in A$ ist.
- (2) Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$ heißt *kompakt*, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Definition: Abgeschlossenheit und Kompaktheit

- (1) Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ heißt *abgeschlossen*, falls für jede konvergente Folge (x_n) in A mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{C}$ bereits gilt, dass $a \in A$ ist.
- (2) Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{C}$ heißt *kompakt*, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beispiele: $\overline{K_r(a)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$ und $[a, b]$ sind kompakt. Hingegen ist $[a, \infty)$ zwar abgeschlossen, aber nicht beschränkt und daher auch nicht kompakt.

Stetige Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich

Satz 4: Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist f bereits gleichmäßig stetig.

Stetige Funktionen mit kompaktem Definitionsbereich

Satz 4: Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist f bereits gleichmäßig stetig.

Satz 5: Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist auch $f(K)$ kompakt.