# Analysis I

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/24

# 3.4 Exponentialreihe und trigonometrische Funktionen

Satz 1: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

absolut.

Bemerkung: Diese Reihe wird als Exponentialreihe bezeichnet.

Beweis: Die Behauptung folgt aus der Eulerschen Formel für den Konvergenzradius, da für $a_n = \frac{1}{n!}$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \to \infty} n + 1 = \infty.$$

# Die Exponentialfunktion

Definition: Die Abbildung

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp(z)$$

heißt *Exponentialfunktion*.

# Die Exponentialfunktion

Definition: Die Abbildung

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp(z)$$

heißt *Exponentialfunktion*.

Der Zusammenhang zur Eulerschen Zahl $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ wird hergestellt durch den folgenden

Satz 2: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Insbesondere ist $\exp(1) = e$.

# Die Funktionalgleichung

Eine wichtige Eigenschaft der Exponentialfunktion ist ihre Funktionalgleichung:

Satz 3: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$.

# Die Funktionalgleichung

Eine wichtige Eigenschaft der Exponentialfunktion ist ihre Funktionalgleichung:

Satz 3: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$.

Folgerungen:

(1) $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

# Die Funktionalgleichung

Eine wichtige Eigenschaft der Exponentialfunktion ist ihre Funktionalgleichung:

Satz 3: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$.

Folgerungen:

(1) $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(2) Für $r \in \mathbb{Q}$ ist $\exp(r) = e^r$. Dies erlaubt die Schreibweise $e^z$ für $\exp(z)$, wenn $z \in \mathbb{C}$.

# Abschätzung für den Reihenrest

Satz 4: Es ist $\exp(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} + r_{n+1}(z)$, wobei für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1 + \frac{n}{2}$ gilt

$$|r_{n+1}(z)| \leq \frac{2}{(n+1)!} |z|^{n+1}.$$

# Abschätzung für den Reihenrest

Satz 4: Es ist $\exp(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} + r_{n+1}(z)$, wobei für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1 + \frac{n}{2}$ gilt

$$|r_{n+1}(z)| \leq \frac{2}{(n+1)!} |z|^{n+1}.$$

Folgerung: Die Eulersche Zahl $e$ ist irrational.

# Die trigonometrischen Funktionen

Definition: Für $z \in \mathbb{C}$ heißt

$$\cos(z) := \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))$$

der Cosinus und

$$\sin(z) := \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$$

der Sinus von $z$.

# Die Eulersche Formel und die Potenzreihendarstellungen der trigonometrischen Funktionen

Satz 5: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

# Die Eulersche Formel und die Potenzreihendarstellungen der trigonometrischen Funktionen

Satz 5: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

(1) $\exp(z) = \cos(z) + i\sin(z)$ (Eulersche Formel),

# Die Eulersche Formel und die Potenzreihendarstellungen der trigonometrischen Funktionen

Satz 5: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

(1) $\exp(z) = \cos(z) + i \sin(z)$ (Eulersche Formel),

(2) $$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k},$$

# Die Eulersche Formel und die Potenzreihendarstellungen der trigonometrischen Funktionen

Satz 5: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

(1) $\exp(z) = \cos(z) + i \sin(z)$ (Eulersche Formel),

(2) $$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k},$$

(3) $$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

# Die Eulersche Formel und die Potenzreihendarstellungen der trigonometrischen Funktionen

Satz 5: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

(1) $\exp(z) = \cos(z) + i \sin(z)$ (Eulersche Formel),

(2) $\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$,

(3) $\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$.

Insbesondere ist $\cos(z) = \cos(-z)$ und $\sin(z) = -\sin(-z)$.

# Die Additionstheoreme

Satz 6: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten

# Die Additionstheoreme

Satz 6: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten

(1) $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$,

# Die Additionstheoreme

Satz 6: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten

(1) $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$,

(2) $\sin(z + w) = \cos(z)\sin(w) + \sin(z)\cos(w)$.

# Die Additionstheoreme

Satz 6: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten

(1) $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$,

(2) $\sin(z + w) = \cos(z)\sin(w) + \sin(z)\cos(w)$.

Folgerung: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten:

(1) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \quad$ (Pythagoras),

# Die Additionstheoreme

Satz 6: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten

(1) $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$,

(2) $\sin(z+w) = \cos(z)\sin(w) + \sin(z)\cos(w)$.

Folgerung: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten:

(1) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ (Pythagoras),

(2) $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$,

# Die Additionstheoreme

Satz 6: Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gelten

(1) $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$,

(2) $\sin(z+w) = \cos(z)\sin(w) + \sin(z)\cos(w)$.

Folgerung: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten:

(1) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ (Pythagoras),

(2) $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$,

(3) $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$.