Analysis I

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/24

3.3 Potenzreihen

Definition: Eine Reihe der Form

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

mit festem $a \in \mathbb{C}$ und einer Folge $(a_n)_n$ komplexer Zahlen heißt eine *Potenzreihe*. Der Punkt $a \in \mathbb{C}$ ist der *Entwicklungspunkt* von $P(z)$, die a_n werden als *Koeffizienten* bezeichnet.

Zusatz: Falls $a \in \mathbb{R}$ und $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so nennt man $P(z)$ eine *reelle Potenzreihe*.

Bemerkungen

Bemerkungen

(1) Durch eine Potenzreihe wird eine Abbildung

$$P : \{z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad \text{konvergiert}\,\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto P(z)$$

definiert.

Bemerkungen

(1) Durch eine Potenzreihe wird eine Abbildung

$$P : \{z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad \text{konvergiert}\,\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto P(z)$$

definiert.

(2) Ist $P(z)$ eine reelle Potenzreihe, so gilt $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Insbesondere ist $P(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkungen

(1) Durch eine Potenzreihe wird eine Abbildung

$$P : \{z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \quad \text{konvergiert}\,\} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto P(z)$$

definiert.

(2) Ist $P(z)$ eine reelle Potenzreihe, so gilt $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Insbesondere ist $P(x) \in \mathbb{R}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(3) Im folgenden (fast) immer: $a = 0$.

Beispiel:

Die geometrische Reihe

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

ist eine reelle Potenzreihe mit $a = 0$ und $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sie konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, der Definitionsbereich der Abbildung P ist hier der Kreis mit Radius 1 um den Entwicklungspunkt $a = 0$. Der Kreisrand ist vom Definitionsbereich ausgenommen.

Das ist ein typischer Fall. Das Konvergenzverhalten von Potenzreihen wird charakterisiert durch den folgenden Satz.

Satz 1:

Es sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe und $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Dann gelten:

Satz 1:

Es sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe und $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
Dann gelten:

(1) Ist $L = 0$, so konvergiert $P(z)$ absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.

Satz 1:

Es sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe und $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
Dann gelten:

(1) Ist $L = 0$, so konvergiert $P(z)$ absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.

(2) Ist $0 < L < \infty$, so konvergiert $P(z)$ absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{L}$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \frac{1}{L}$.

Satz 1:

Es sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe und $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
Dann gelten:

(1) Ist $L = 0$, so konvergiert $P(z)$ absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.

(2) Ist $0 < L < \infty$, so konvergiert $P(z)$ absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{L}$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \frac{1}{L}$.

(3) Ist $L = \infty$, so konvergiert $P(z)$ nur für $z = 0$.

Satz 1:

Es sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe und $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.
Dann gelten:

(1) Ist $L = 0$, so konvergiert $P(z)$ absolut für alle $z \in \mathbb{C}$.

(2) Ist $0 < L < \infty$, so konvergiert $P(z)$ absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{L}$ und divergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \frac{1}{L}$.

(3) Ist $L = \infty$, so konvergiert $P(z)$ nur für $z = 0$.

Bemerkung: Die Konvergenzbereiche von Potenzreihen sind also Kreise in der komplexen Ebene, wobei wir die Ebene selbst als "unendlich großen Kreis" auffassen können. Dies führt zu der folgenden Begriffsbildung:

Konvergenzradius und -kreis einer Potenzreihe

Definition: Zu einer gegebenen Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ nennen wir

$$R := \sup\{r \geq 0 : P(r)\,\text{konvergiert}\,\} \in [0, \infty]$$

den *Konvergenzradius* von P und $K_R(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ den *Konvergenzkreis* von P.

Konvergenzradius und -kreis einer Potenzreihe

Definition: Zu einer gegebenen Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ nennen wir

$$R := \sup\{r \geq 0 : P(r)\,\text{konvergiert}\,\} \in [0, \infty]$$

den *Konvergenzradius* von P und $K_R(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ den *Konvergenzkreis* von P.

Satz 1 sagt dann aus: $P(z)$ konvergiert absolut im Innern des Konvergenzkreises und divergiert außerhalb. Den Konvergenzradius kann man berechnen nach der *Formel von Cauchy-Hadamard*:

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}. \qquad \text{(Hierbei: } \tfrac{1}{0} = \infty,\ \tfrac{1}{\infty} = 0.\text{)}$$

Eulersche Formel für den Konvergenzradius

In vielen Fällen lässt sich der Konvergenzradius einer Potenzreihe auch mit Hilfe des Quotientenkriteriums bestimmen.

Satz 2: Für den Konvergenzradius R einer Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gilt:

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

falls dieser Limes (eigentlich oder uneigentlich) existiert.