Analysis I

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/24

3.2 Umordnung von Reihen und das Cauchy-Produkt

Wir beginnen mit zwei Folgerungen aus dem Majorantenkriterium.

Lemma 1: Es sei $(c_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $c_n = a_n + ib_n$, wobei $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergiert genau dann absolut, wenn beide Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergieren.

Beweis: Folgt aus den Ungleichungen $|c_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq 2|c_n|$ und dem Majorantenkriterium.

Zerlegung in positive und negative Summanden

Für $x \in \mathbb{R}$ setzen wir $x^+ := \max(x, 0)$ und $x^- := \max(-x, 0)$, so dass $x = x^+ - x^-$ und $|x| = x^+ + x^-$.

Zerlegung in positive und negative Summanden

Für $x \in \mathbb{R}$ setzen wir $x^+ := \max(x, 0)$ und $x^- := \max(-x, 0)$, so dass $x = x^+ - x^-$ und $|x| = x^+ + x^-$.

Lemma 2: Es sei $(a_n)_n$ eine reelle Zahlenfolge. Dann gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann absolut, wenn beide Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergieren.

Beweis: Dies folgt wegen $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ und $a_n^{\pm} \leq |a_n|$ aus dem Majorantenkriterium.

Folgerung

Ist $(a_n)_n$ eine reelle Zahlenfolge, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, so divergieren beide Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

Beweis: Konvergieren $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, so konvergiert auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Nach Lemma 2 ist dann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Der Riemannsche Umordnungssatz

Definition: Es sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Dann heißt $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ eine *Umordnung* der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Der Riemannsche Umordnungssatz

Definition: Es sei $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Dann heißt $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ eine *Umordnung* der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Satz 1 (Riemann): Es sei $(a_n)_n$ eine reelle Zahlenfolge, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert. Dann gibt es zu jedem $c \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = c$.

Bemerkung: Unter den Voraussetzungen des Satzes existieren auch solche Umordnungen von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, für die $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \infty$ bzw. $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = -\infty$. Daher nennt man solche Reihen auch *bedingt konvergent*.

Umordnung absolut konvergenter Reihen

Satz 2 (Umordnungssatz): Es sei $(a_n)_n$ eine komplexe Zahlenfolge und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Dann konvergiert auch jede Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ absolut und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Bemerkung: Man nennt daher absolut konvergente Reihen mitunter auch *unbedingt konvergent*.

Distributivgesetz für konvergente Reihen

Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m\right)\left[=: \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m\right] \quad ?$$

Überraschenderweise ist hierfür lediglich die Konvergenz beider Reihen erforderlich:

Lemma 3

Es seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konvergente Reihen komplexer Zahlen. Dann gilt:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_m.$$

Lemma 3

Es seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konvergente Reihen komplexer Zahlen. Dann gilt:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_m.$$

Bemerkung: Ohne die Produktstruktur der Summanden und ohne die Voraussetzung der absoluten Konvergenz wird die Aussage falsch. Beispiel:

$$a_{nm} = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & : & \text{für } n = m \\ \frac{1}{n^2 - m^2} & : & \text{für } n \neq m \end{array} \right\} \qquad \Rightarrow$$

$$0 \neq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}}_{= -\frac{\pi^2}{8}} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}$$

Definition: Faltung

Für komplexe Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{\substack{0\le k,l\le n \\ k+l=n}} a_k b_l$$

die *Faltung* der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Definition: Faltung

Für komplexe Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = \sum_{\substack{0\leq k,l\leq n\\ k+l=n}} a_k b_l$$

die *Faltung* der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Bemerkung: Häufig kürzt man $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $b := (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ab, so dass man die Faltung als $a * b$ schreiben kann, wobei die Folge $a * b$ die Folgenglieder $(a*b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$ hat.

Ein Gegenbeispiel

Das vorgeschlagene Summationsverfahren ist mit einer Reihenumordnung verbunden und führt im allgemeinen nicht zum Ziel. Beispiel:

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \text{ mit } n \geq 0,$$

Hier erweist sich ($\rightarrow$ Rechnung) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht als Nullfolge und somit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ als divergent, obwohl $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergieren.

Unter der Voraussetzung der absoluten Konvergenz beider Reihen erhält man jedoch das gewünschte Ergebnis:

Der Satz über das Cauchy-Produkt von Reihen

Satz 3: Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Faltung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Der Satz über das Cauchy-Produkt von Reihen

Satz 3: Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Faltung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Man kann die Voraussetzungen sogar noch etwas abschwächen und auf die absolute Konvergenz *einer* der beiden Reihen verzichten, wie der folgende Satz zeigt:

Der Satz von Mertens

Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen, dabei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent, und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Faltung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent und mit $a := \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sowie $b := \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = ab.$$

Bemerkung: Der Satz von Mertens impliziert den Satz 3 über das Cauchy-Produkt von Reihen.

Abschließende Bemerkung (ohne Beweis):

Zur Konvergenz des Cauchy-Produkts von Reihen gilt ferner der folgende

Satz: Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Faltung von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. *Wenn* die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ebenfalls konvergiert, so gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Beweis: Kaballo I, Folgerung 38.12 zu Satz 38.10.