Analysis I

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/24

3. Unendliche Reihen

Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ komplexer Zahlen.

Definition: Die endlichen Summen $s_n := \sum_{k=n_0}^{n} a_k$ werden als *Partialsummen* (der Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$) bezeichnet, die Folge

$(s_n)_{n \geq n_0}$ heißt *Partialsummenfolge.*

3. Unendliche Reihen

Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ komplexer Zahlen.

Definition: Die endlichen Summen $s_n := \sum_{k=n_0}^{n} a_k$ werden als *Partialsummen* (der Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$) bezeichnet, die Folge

$(s_n)_{n \geq n_0}$ heißt *Partialsummenfolge.*

Definition: Wenn die Folge $(s_n)_{n \geq n_0}$ konvergiert, nennen wir

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k := \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=n_0}^{n} a_k$$

eine *(unendliche) Reihe*.

Sprechweise

Das Symbol $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ wird häufig als Synonym für die Partialsummenfolge verwendet. Z. B. sagen wir, dass $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ konvergiert (oder divergiert), wenn der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ existiert (bzw. nicht existiert).

Bezeichnung für reelle Zahlenfolgen:

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = \pm\infty :\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$$

Beispiele

Beispiele

(1) Eine "Teleskopreihe":

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Beispiele

(1) Eine “Teleskopreihe”:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

(2) Die “harmonische Reihe”

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert.

Unser nächstes Beispiel wird so oft verwendet, dass wir es als Satz formulieren:

Satz 1 (geometrische Reihe):

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Beispiele zur geometrischen Reihe: Flummi, Achill und die Schildkröte, ein periodischer Dezimalbruch, ... ($\rightarrow$ Übungen)

3.1 Konvergenzkriterien für Reihen

Reihen sind per definitionem die Grenzwerte der Partialsummenfolgen, also können wir die Rechenregeln für Grenzwerte anwenden:

Satz 2: Es seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n + \mu b_n$ und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n + \mu b_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Satz 3

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $c_n = a_n + ib_n$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ genau dann, wenn beide Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

konvergieren.

Cauchy-Kriterium für Reihen

Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ konvergiert eine Folge komplexer Zahlen genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Wenden wir dies auf die Folge der Partialsummen an, erhalten wir:

Satz 4: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn gilt:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $\left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$

für alle $m, n \geq N$.

Eine notwendige Bedingung für Reihenkonvergenz

Folgerung aus Satz 4: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}$ konvergiert. Dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Eine notwendige Bedingung für Reihenkonvergenz

Folgerung aus Satz 4: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}$ konvergiert. Dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Beispiel: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ divergiert, da $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge ist. (Hier irrte Leibniz, der behauptete, der Wert dieser Reihe sei $\frac{1}{2}$.)

Eine notwendige Bedingung für Reihenkonvergenz

Folgerung aus Satz 4: Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}$ konvergiert. Dann ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Beispiel: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ divergiert, da $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keine Nullfolge ist. (Hier irrte Leibniz, der behauptete, der Wert dieser Reihe sei $\frac{1}{2}$.)

Bemerkung: Die Folgerung aus Satz 4 liefert lediglich ein notwendiges, jedoch *kein hinreichendes* Kriterium für die Konvergenz einer Reihe, wie das Beispiel der harmonischen Reihe zeigt.

Verallgemeinertes Leibniz-Kriterium

Satz 5: Es sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen und $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ mit $|z| = 1$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n =: a,$$

und es gilt die Fehlerabschätzung

$$\left| a - \sum_{n=1}^{m-1} a_n z^n \right| \leq \frac{2a_m}{|z-1|}.$$

Bemerkung: Für $z = -1$ ist dies das eigentliche Leibniz-Kriterium. Hier ist der Fehler gerade a_m.

Definition: *Absolute Konvergenz*

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Bemerkungen:

Definition: *Absolute Konvergenz*

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Bemerkungen:

(1) Aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz.

Definition: *Absolute Konvergenz*

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Bemerkungen:

(1) Aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz.

(2) Die Umkehrung gilt nicht, wie das Beispiel der alternierenden Harmonischen Reihe zeigt.

Definition: *Absolute Konvergenz*

Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Bemerkungen:

(1) Aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz.

(2) Die Umkehrung gilt nicht, wie das Beispiel der alternierenden Harmonischen Reihe zeigt.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ beschränkt ist. Denn (s_n) ist hier monoton steigend.

Das Majorantenkriterium

Die dritte der obigen Bemerkungen liefert unmittelbar ein wichtiges Vergleichskriterium für absolute Konvergenz:

Satz 6: Es seien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe und (a_n) eine Folge komplexer Zahlen mit $|a_n| \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Bemerkungen

Bemerkungen

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt eine *Majorante* von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Bemerkungen

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt eine *Majorante* von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(2) Für $r \in \mathbb{Q}$ mit $r \geq 2$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$, denn $\frac{1}{n^r} \leq \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

Bemerkungen

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt eine *Majorante* von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(2) Für $r \in \mathbb{Q}$ mit $r \geq 2$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$, denn $\frac{1}{n^r} \leq \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

(3) Satz 6 liefert zugleich ein Divergenzkriterium: Sind (a_n) und (b_n) reelle Zahlenfolgen mit $0 \leq a_n \leq b_n$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent. (Andernfalls wäre ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine konvergente Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$!)

Bemerkungen

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt eine *Majorante* von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(2) Für $r \in \mathbb{Q}$ mit $r \geq 2$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$, denn $\frac{1}{n^r} \leq \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

(3) Satz 6 liefert zugleich ein Divergenzkriterium: Sind (a_n) und (b_n) reelle Zahlenfolgen mit $0 \leq a_n \leq b_n$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent. (Andernfalls wäre ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine konvergente Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$!)

(4) Für $r \in \mathbb{Q}$ mit $r \leq 1$ divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$, denn $\frac{1}{n^r} \geq \frac{1}{n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Bemerkungen

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ heißt eine *Majorante* von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(2) Für $r \in \mathbb{Q}$ mit $r \geq 2$ konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$, denn $\frac{1}{n^r} \leq \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

(3) Satz 6 liefert zugleich ein Divergenzkriterium: Sind (a_n) und (b_n) reelle Zahlenfolgen mit $0 \leq a_n \leq b_n$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent. (Andernfalls wäre ja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine konvergente Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$!)

(4) Für $r \in \mathbb{Q}$ mit $r \leq 1$ divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$, denn $\frac{1}{n^r} \geq \frac{1}{n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

(5) Auf die Frage der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ für $r \in (1, 2)$ werden wir später zurückkommen.

Das Quotientenkriterium

Satz 7: Es sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1.$$

Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Das Quotientenkriterium

Satz 7: Es sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1.$$

Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

Bemerkungen und Beispiel:

(1) Ein entsprechendes Divergenzkriterium lautet: Ist $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$ für alle $n \geq n_0$, so divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. In diesem Fall ist nämlich (a_n) *keine* Nullfolge.

Bemerkung und Beispiel zum Quotientenkriterium

(2) Die Voraussetzung $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ für alle $n \geq n_0$ ist *nicht* ausreichend für die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Beispiel: $a_n = \frac{1}{n}$.

Bemerkung und Beispiel zum Quotientenkriterium

(2) Die Voraussetzung $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$ für alle $n \geq n_0$ ist *nicht* ausreichend für die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Beispiel: $a_n = \frac{1}{n}$.

(3) Es seien $k \in \mathbb{Z}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ sowie $a_n = n^k z^n$. Dann ist

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k |z| = |z| < 1.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n$ konvergiert also absolut.

Das Wurzelkriterium

Satz 8: Es sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen und

$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dann gilt:

(1) Ist $L < 1$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut,

(2) ist $L > 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Bemerkungen zum Wurzelkriterium

(1) Das Wurzelkriterium ist etwas schärfer als das Quotientenkriterium, wie das Beispiel

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} & : \quad \text{für gerades } n \\ 3^{-n} & : \quad \text{für ungerades } n \end{cases}$$

zeigt. Hierfür ist

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-(n+1)}}{3^{-n}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n = \infty,$$

während $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{1}{2}$.

Bemerkungen zum Wurzelkriterium

(2) Ähnlich wie beim Quotientenkriterium kann man für $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ keine Aussage treffen. Beispiel:

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad a_n = \frac{1}{n^2}.$$

In beiden Fällen ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Im ersten Fall divergiert, im zweiten Fall konvergiert die Reihe. Beide Kriterien sind also zu grob, um die Frage nach der Konvergenz von

$$a_n = \frac{1}{n^r} \qquad \text{für} \qquad r \in \mathbb{Q} \cap (1,2)$$

zu beantworten.

Der Verdichtungssatz von Cauchy

Satz 9: Es sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty.$$

Der Verdichtungssatz von Cauchy

Satz 9: Es sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen.
Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty.$$

Anwendung: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ konvergiert genau dann, wenn $r > 1$ ist.