Analysis I

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/24

2.5 Ergänzungen zur Vollständigkeit
2.5.1 Limes superior und Limes inferior

Definition: Für eine beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen heißt

2.5 Ergänzungen zur Vollständigkeit
2.5.1 Limes superior und Limes inferior

Definition: Für eine beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen heißt

(1) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n := \lim\limits_{k\to\infty} \sup\{a_n : n \geq k\}$ der *Limes superior* (oberer Grenzwert) und

2.5 Ergänzungen zur Vollständigkeit
2.5.1 Limes superior und Limes inferior

Definition: Für eine beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen heißt

(1) $\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} \sup\{a_n : n \geq k\}$ der *Limes superior* (oberer Grenzwert) und

(2) $\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{k\to\infty} \inf\{a_n : n \geq k\}$ der *Limes inferior* (unterer Grenzwert) der Folge (a_n).

2.5 Ergänzungen zur Vollständigkeit
2.5.1 Limes superior und Limes inferior

Definition: Für eine beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen heißt

(1) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n := \lim\limits_{k\to\infty} \sup\{a_n : n \geq k\}$ der *Limes superior* (oberer Grenzwert) und

(2) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n := \lim\limits_{k\to\infty} \inf\{a_n : n \geq k\}$ der *Limes inferior* (unterer Grenzwert) der Folge (a_n).

Alternative Schreibweise: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, entsprechend $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Satz 1

(a_n) sei eine beschränkte Folge reeller Zahlen und $H((a_n))$ die Menge ihrer Häufungswerte. Dann gelten

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \max H((a_n)) \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \min H((a_n)).$$

Satz 1

(a_n) sei eine beschränkte Folge reeller Zahlen und $H((a_n))$ die Menge ihrer Häufungswerte. Dann gelten

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \max H((a_n)) \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \min H((a_n)).$$

Folgerung: Für eine beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen sind äquivalent:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,

(2) $H((a_n)) = \{a\}$,

(3) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Satz 1

(a_n) sei eine beschränkte Folge reeller Zahlen und $H((a_n))$ die Menge ihrer Häufungswerte. Dann gelten

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \max H((a_n)) \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \min H((a_n)).$$

Folgerung: Für eine beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen sind äquivalent:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, (2) $H((a_n)) = \{a\}$,

(3) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Anwendung: Um (1) zu beweisen, reicht es also

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \quad \leq \quad a \quad \leq \quad \liminf_{n\to\infty} a_n$$

und damit (3) zu zeigen.

Konvention

Man schreibt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

falls (a_n) nicht nach oben, und

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty,$$

falls (a_n) nicht nach unten beschränkt ist.

2.5.2 Die Vollständigkeit von $\mathbb{C}$

Die Vollständigkeitseigenschaften von $\mathbb{R}$ übertragen sich auf $\mathbb{C}$, soweit sie unabhängig von der Anordnung sind. Es gelten:

Satz 2: Jede Cauchy-Folge (z_n) komplexer Zahlen konvergiert.

2.5.2 Die Vollständigkeit von $\mathbb{C}$

Die Vollständigkeitseigenschaften von $\mathbb{R}$ übertragen sich auf $\mathbb{C}$, soweit sie unabhängig von der Anordnung sind. Es gelten:

Satz 2: Jede Cauchy-Folge (z_n) komplexer Zahlen konvergiert.

Satz 3 (Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{C}$): Jede beschränkte Folge (z_n) komplexer Zahlen besitzt eine in $\mathbb{C}$ konvergente Teilfolge.

2.5.3 b - adische Entwicklungen

In den Abschnitten 2.1 bis 2.4 haben wir die reellen Zahlen charakterisiert als eine vollständigen, Archimedes'sch angeordneten Körper, der $\mathbb{Q}$ umfasst.

Andererseits gehört zu unserem Schulwissen (bestätigt in der ersten Vorlesung !), dass die reellen Zahlen die Menge aller Dezimalzahlen sind, dass also

$$\mathbb{R} = \{\pm a, a_1 a_2 a_3 .... : a \in \mathbb{N}_0, a_k \in \{0, 1, ..., 9\} \quad \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

2.5.3 b - adische Entwicklungen

In den Abschnitten 2.1 bis 2.4 haben wir die reellen Zahlen charakterisiert als eine vollständigen, Archimedes'sch angeordneten Körper, der $\mathbb{Q}$ umfasst.

Andererseits gehört zu unserem Schulwissen (bestätigt in der ersten Vorlesung !), dass die reellen Zahlen die Menge aller Dezimalzahlen sind, dass also

$$\mathbb{R} = \{\pm a, a_1 a_2 a_3 .... : a \in \mathbb{N}_0, a_k \in \{0, 1, ..., 9\} \quad \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

Stimmen beide Auffassungen von $\mathbb{R}$ überein? Genauer:
Definiert jede Dezimalbruchentwicklung eine reelle Zahl?
Und umgekehrt:
Gibt es zu jeder reellen Zahl eine Dezimaldarstellung?

Definition: Abbrechende b - adische Entwicklung

Es sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$. Dann heißt eine Summe

$$\pm \sum_{k=-M}^{N} a_k b^k$$

mit $N \in \mathbb{N}_0$, $M \in \mathbb{Z}$, $-M \leq N$ und $a_k \in \{0, ..., b-1\}$ ein *endlicher b - albruch* oder eine *abbrechende b - adische Entwicklung*.

Definition: Abbrechende b - adische Entwicklung

Es sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$. Dann heißt eine Summe

$$\pm \sum_{k=-M}^{N} a_k b^k$$

mit $N \in \mathbb{N}_0$, $M \in \mathbb{Z}$, $-M \leq N$ und $a_k \in \{0, ..., b-1\}$ ein *endlicher b - albruch* oder eine *abbrechende b - adische Entwicklung*.

Bezeichnungen: b Basis (üblich: $b \in \{2, 3, 10, 12, 60\}$), a_k Ziffern.

Eine nicht-abbrechende b - adische Entwicklung wollen wir als Grenzwert von abbrechenden auffassen, dazu müssen wir uns vergewissern, dass dieser Grenzwert existiert.

Lemma 1:

Es seien $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, $M \in \mathbb{Z}$ und $(a_k)_{k \geq -M}$ eine Folge mit Werten in $\{0, ..., b-1\}$ sowie

$$S_N = \sum_{k=-M}^{N} a_k b^{-k}.$$

Dann existiert in $\mathbb{R}$ der Grenzwert $\lim\limits_{N \to \infty} S_N$.

Definition:

Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$. Dann heißt der Grenzwert

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{k=-M}^{N} a_k b^{-k}$$

mit $M \in \mathbb{Z}$ und $a_k \in \{0, ..., b-1\}$ eine b - *adische Entwicklung* bzw. ein b - *albruch*.

Bezeichnung: Gilt für ein $x \in \mathbb{R}$, dass $x = \pm \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-M}^{N} a_k b^{-k}$, so nennen wir diese Darstellung die b - adische Entwicklung von x oder auch die b - albruch-Darstellung von x.

Bemerkungen:

Bemerkungen:

(1) Insbesondere konvergiert nach Lemma 1 jeder Dezimalbruch gegen eine reelle Zahl. Damit ist der erste Teil der Eingangsfrage positiv beantwortet.

Bemerkungen:

(1) Insbesondere konvergiert nach Lemma 1 jeder Dezimalbruch gegen eine reelle Zahl. Damit ist der erste Teil der Eingangsfrage positiv beantwortet.

(2) Durch die Forderung

$$\text{“}a_k \neq b - 1 \text{ für unendlich viele } a_k\text{ ”} \tag{*}$$

kann man bei gegebenen b und x die Eindeutigkeit der b -adischen Darstellung von x erzwingen.

Satz 4: Existenz der b - adischen Entwicklung für $x \in \mathbb{R}$

Es seien $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann existieren $M \in \mathbb{Z}$ und eine Folge $(a_k)_{k \geq -M}$ mit Werten in $\{0, ..., b-1\}$, so dass

$$x = \pm \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-M}^{N} a_k b^{-k}.$$

Bemerkungen

Bemerkungen

(1) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert also eine Dezimalbruchentwicklung. Daher stimmen die beiden Auffassungen von $\mathbb{R}$ tatsächlich überein.

Bemerkungen

(1) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert also eine Dezimalbruchentwicklung. Daher stimmen die beiden Auffassungen von $\mathbb{R}$ tatsächlich überein.

(2) $\mathbb{Q}$ ist *dicht* in $\mathbb{R}$, d.h.: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Folge (q_k) rationaler Zahlen, so dass $x = \lim_{k\to\infty} q_k$.

Bemerkungen

(1) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert also eine Dezimalbruchentwicklung. Daher stimmen die beiden Auffassungen von $\mathbb{R}$ tatsächlich überein.

(2) $\mathbb{Q}$ ist *dicht* in $\mathbb{R}$, d.h.: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Folge (q_k) rationaler Zahlen, so dass $x = \lim_{k\to\infty} q_k$.

(3) Betrachten wir noch einmal die Folge

$$(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}. \frac{1}{5}, \ldots\right).$$

Dann ist $H((a_n)) = [0,1]$. Denn ist $x \in [0,1]$ gegeben, so existiert nach (2) eine Folge (q_k) in $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ mit $q_k \to x \quad (k \to \infty)$. Jedes $q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ taucht unendlich oft in (a_n) auf, also können wir eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) auswählen mit $a_{n_k} = q_k$.

2.5.4 Die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Definition: Eine Menge $A \neq \emptyset$ heißt *abzählbar*, wenn es eine surjektive Abbildung

$$\varphi : \mathbb{N} \to A$$

gibt. Existiert keine solche Abbildung, heißt A *überabzählbar*.

Bemerkungen:

2.5.4 Die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Definition: Eine Menge $A \neq \emptyset$ heißt *abzählbar*, wenn es eine surjektive Abbildung

$$\varphi : \mathbb{N} \to A$$

gibt. Existiert keine solche Abbildung, heißt A *überabzählbar*.

Bemerkungen:

(1) Ist $\varphi : \mathbb{N} \to A$ bijektiv, sprechen wir von einer *Abzählung* von A.

2.5.4 Die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Definition: Eine Menge $A \neq \emptyset$ heißt *abzählbar*, wenn es eine surjektive Abbildung

$$\varphi : \mathbb{N} \to A$$

gibt. Existiert keine solche Abbildung, heißt A *überabzählbar*.

Bemerkungen:

(1) Ist $\varphi : \mathbb{N} \to A$ bijektiv, sprechen wir von einer *Abzählung* von A.

(2) Ist A abzählbar und $\#A = \infty$, so gibt es auch eine Bijektion $\varphi_0 : \mathbb{N} \to A$. (Beweis: Tafel)

Beispiele

Beispiele

(1) $\mathbb{N}$ ist abzählbar ($\varphi = Id$).

Beispiele

(1) $\mathbb{N}$ ist abzählbar ($\varphi = Id$).

(2) Sind A abzählbar und $\emptyset \neq A' \subset A$, so ist A' ebenfalls abzählbar. Denn ist $\varphi : \mathbb{N} \to A$ surjektiv, so können wir $\psi(n) = \varphi(n)$ setzen, falls letzteres in A' liegt, sonst $\psi(n) = a_0$, mit einem festen $a_0 \in A'$. Dann ist $\psi : \mathbb{N} \to A$ ebenfalls surjektiv.

Beispiele

(1) $\mathbb{N}$ ist abzählbar ($\varphi = Id$).

(2) Sind A abzählbar und $\emptyset \neq A' \subset A$, so ist A' ebenfalls abzählbar. Denn ist $\varphi : \mathbb{N} \to A$ surjektiv, so können wir $\psi(n) = \varphi(n)$ setzen, falls letzteres in A' liegt, sonst $\psi(n) = a_0$, mit einem festen $a_0 \in A'$. Dann ist $\psi : \mathbb{N} \to A$ ebenfalls surjektiv.

(3) $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, eine Abzählung ist z. B. gegeben durch

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, n \mapsto \varphi(n) := \begin{cases} n/2 & : \text{ für gerades } n \\ (1-n)/2 & : \text{ für ungerades } n \end{cases} .$$

Noch ein Beispiel

Noch ein Beispiel

(4) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar, denn allgemein gilt:
Ist M eine Menge und $\varphi : M \to \mathcal{P}(M)$ eine Abbildung, so ist φ nicht surjektiv.

Bew.: Annahme doch. Dann existiert ein $x_0 \in M$ mit

$$\varphi(x_0) = \{x \in M : x \notin \varphi(x)\}.$$

Ist dann $x_0 \in \varphi(x_0)$, so folgt aus der Definition der Menge, dass $x_0 \notin \varphi(x_0)$, und umgekehrt. Also:

$$x_0 \in \varphi(x_0) \Leftrightarrow x_0 \notin \varphi(x_0). \text{ Widerspruch.}$$

Satz 5

Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abzählbarer Mengen, so ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar.

Folgerungen:

Satz 5

Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abzählbarer Mengen, so ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar.

Folgerungen:

(1) $\mathbb{N}^2 = \{(n, m) : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(n, m) : m \in \mathbb{N}\}$ und

Satz 5

Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abzählbarer Mengen, so ist auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar.

Folgerungen:

(1) $\mathbb{N}^2 = \{(n, m) : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(n, m) : m \in \mathbb{N}\}$ und

(2) $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{q\in\mathbb{N}}\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}\}$ sind abzählbar.

Satz 6

Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Folgerung (aus dem Beweis): Jedes Intervall $(0, \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ ist überabzählbar, denn

$$f : (0,1) \to (0, \varepsilon), \quad x \mapsto f(x) = \varepsilon x$$

ist bijektiv.