Analysis I

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/24

2.4 Das Vollständigkeitsaxiom

Definition: Eine Folge (a_n) komplexer Zahlen heißt eine *Cauchy-Folge*, falls gilt:

> Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$.

2.4 Das Vollständigkeitsaxiom

Definition: Eine Folge (a_n) komplexer Zahlen heißt eine *Cauchy-Folge*, falls gilt:

> Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$.

Schreibweisen: $\lim\limits_{n,m\to\infty} a_n - a_m = 0, \quad a_n - a_m \to 0 \ (n, m \to \infty)$.

Satz 1

Jede konvergente Folge (a_n) komplexer Zahlen ist eine Cauchy-Folge.

Das Vollständigkeitsaxiom ...

... für die reellen Zahlen besagt gerade, dass in $\mathbb{R}$ auch die Umkehrung von Satz 1 gilt:

(V) Jede Cauchy-Folge (a_n) reeller Zahlen besitzt einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$.

Das Vollständigkeitsaxiom ...

... für die reellen Zahlen besagt gerade, dass in $\mathbb{R}$ auch die Umkehrung von Satz 1 gilt:

(V) Jede Cauchy-Folge (a_n) reeller Zahlen besitzt einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Mit dem Vollständigkeitsaxiom ist die axiomatische Charakterisierung der reellen Zahlen abgeschlossen. Wir fassen $\mathbb{R}$ also im folgenden auf als eine *vollständigen, Archimedes'sch angeordneten Körper*, in den die natürlichen Zahlen (und damit auch $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$) eingebettet sind.

Durch diese Eigenschaften sind die reellen Zahlen tatsächlich bis auf Isomorphie festgelegt, denn es gilt der ...

Eindeutigkeitssatz

Es sei K ein weiterer Körper (neben $\mathbb{R}$), in dem die Axiome (A1)-(A3), (A) und (V) gelten. Dann existiert eine Bijektion $\varphi : K \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

Eindeutigkeitssatz

Es sei K ein weiterer Körper (neben $\mathbb{R}$), in dem die Axiome (A1)-(A3), (A) und (V) gelten. Dann existiert eine Bijektion $\varphi : K \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\varphi(0_K) = 0$, $\varphi(1_K) = 1$,

Eindeutigkeitssatz

Es sei K ein weiterer Körper (neben $\mathbb{R}$), in dem die Axiome (A1)-(A3), (A) und (V) gelten. Dann existiert eine Bijektion $\varphi : K \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\varphi(0_K) = 0$, $\varphi(1_K) = 1$,

(2) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$,

Eindeutigkeitssatz

Es sei K ein weiterer Körper (neben $\mathbb{R}$), in dem die Axiome (A1)-(A3), (A) und (V) gelten. Dann existiert eine Bijektion $\varphi : K \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\varphi(0_K) = 0$, $\varphi(1_K) = 1$,

(2) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$,

(3) $a < b \Leftrightarrow \varphi(a) < \varphi(b)$,

Eindeutigkeitssatz

Es sei K ein weiterer Körper (neben $\mathbb{R}$), in dem die Axiome (A1)-(A3), (A) und (V) gelten. Dann existiert eine Bijektion $\varphi : K \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\varphi(0_K) = 0$, $\varphi(1_K) = 1$,

(2) $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$,

(3) $a < b \Leftrightarrow \varphi(a) < \varphi(b)$,

(4) $(a_n)_n$ ist konvergent bzw. eine Cauchy-Folge in $K \Leftrightarrow (\varphi(a_n))_n$ ist konvergent bzw. eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.

Beweis: Ebbinghaus u.a.: Zahlen. Kap. 2, § 5.

$\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

Im Rest dieses Abschnitts werden wir eine Reihe wichtiger Eigenschaften der reellen Zahlen aus dem Vollständigkeitsaxiom und den vorangegangenen Axiomen herleiten.

Zunächst wollen wir uns jedoch davon überzeugen, dass (V) tatsächlich eine Eigenschaft ist, die $\mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ unterscheidet. Dazu werden wir eine Cauchy-Folge rationaler Zahlen angeben, die in $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert besitzt.

Zum Nachweis der Cauchy-Eigenschaft dient dabei das folgende Kriterium:

Satz 2

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit der folgenden Eigenschaft:

Es existieren $C \geq 0$, $q \in [0,1)$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq Cq^n.$$

Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Satz 2

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit der folgenden Eigenschaft:

Es existieren $C \geq 0$, $q \in [0, 1)$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq Cq^n.$$

Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Bemerkung: Die Voraussetzung des Satzes ist insbesondere dann erfüllt, wenn für $n \geq n_0$ gilt

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q|a_n - a_{n-1}|.$$

Beispiel

Betrachten wir nun für $a > 0$ die rekursiv definierte Folge

$$x_1 := a, \qquad x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Wir stellen fest:

Beispiel

Betrachten wir nun für $a > 0$ die rekursiv definierte Folge

$$x_1 := a, \qquad x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Wir stellen fest:

(1) Für $a \in \mathbb{Q}$ sind alle $x_n \in \mathbb{Q}^+$.

Beispiel

Betrachten wir nun für $a > 0$ die rekursiv definierte Folge

$$x_1 := a, \qquad\qquad x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Wir stellen fest:

(1) Für $a \in \mathbb{Q}$ sind alle $x_n \in \mathbb{Q}^+$.

(2) Für $n \geq 2$ ist $x_n x_{n-1} \geq \frac{a}{2}$, denn:

$$x_n x_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) = \frac{x_{n-1}^2}{2} + \frac{a}{2} \geq \frac{a}{2}.$$

Beispiel

Betrachten wir nun für $a > 0$ die rekursiv definierte Folge

$$x_1 := a, \qquad\qquad x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Wir stellen fest:

(1) Für $a \in \mathbb{Q}$ sind alle $x_n \in \mathbb{Q}^+$.

(2) Für $n \geq 2$ ist $x_n x_{n-1} \geq \frac{a}{2}$, denn:

$$x_n x_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) = \frac{x_{n-1}^2}{2} + \frac{a}{2} \geq \frac{a}{2}.$$

(3) $$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} - \frac{a}{x_{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})\left(1 - \frac{a}{x_n x_{n-1}}\right), \end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels

Fortsetzung des Beispiels

(4) Nach (2) ist $0 \leq \dfrac{a}{x_n x_{n-1}} \leq 2$ und damit $\left|1 - \dfrac{a}{x_n x_{n-1}}\right| \leq 1$,

nach (3) also $|x_{n+1} - x_n| \leq \dfrac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|$.

Fortsetzung des Beispiels

(4) Nach (2) ist $0 \leq \dfrac{a}{x_n x_{n-1}} \leq 2$ und damit $\left|1 - \dfrac{a}{x_n x_{n-1}}\right| \leq 1$,

nach (3) also $|x_{n+1} - x_n| \leq \dfrac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|$.

(5) Aufgrund von Satz 2 und der anschließenden Bemerkung ist (x_n) eine Cauchy-Folge (rationaler Zahlen, falls $a \in \mathbb{Q}$, s. (1)).

Fortsetzung des Beispiels

(4) Nach (2) ist $0 \leq \frac{a}{x_n x_{n-1}} \leq 2$ und damit $\left|1 - \frac{a}{x_n x_{n-1}}\right| \leq 1$,
nach (3) also $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|$.

(5) Aufgrund von Satz 2 und der anschließenden Bemerkung ist (x_n) eine Cauchy-Folge (rationaler Zahlen, falls $a \in \mathbb{Q}$, s. (1)).

(6) Aufgrund der Vollständigkeit der reellen Zahlen (Axiom (V)) existiert in $\mathbb{R}$ der Grenzwert $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Die Rechenregeln für Grenzwerte ergeben zusammen mit der Rekursionsformel:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Der Grenzwert ist also die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung $x^2 = a$, d.h.: $x = \sqrt{a}$.

Fortsetzung des Beispiels

Fortsetzung des Beispiels

(7) Damit ist der Beweis der Existenz von Quadratwurzeln nachgeholt und zugleich ein Verfahren zu ihrer näherungsweisen Berechnung angegeben, das sogenannte "Babylonische Wurzelziehen".

Fortsetzung des Beispiels

Fortsetzung des Beispiels

(8) In ähnlicher Weise kann man konstruktiv die Existenz p-ter Wurzeln ($p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$) positiver reeller Zahlen zeigen. Die entsprechende rekursiv definierte Folge ist

$$x_1 := a, \qquad x_{n+1} := \frac{1}{p}\left((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right),$$

die gegen die eindeutig bestimmte Lösung $x \in \mathbb{R}$ der Gleichung $x^p = a$ konvergiert. Für eine Anleitung zum Beweis der Konvergenz vgl.: Übungen zur Analysis I vom **SoSe 19**, Blatt 5, Aufgabe 18. Die Eindeutigkeit erhält man aus der geometrischen Summenformel:

$$b^p - a^p = \left(\sum_{k=0}^{p-1} a^k b^{p-1-k}\right)(b-a).$$

Fortsetzung des Beispiels

Fortsetzung des Beispiels

(9) Für $p = 2$ und $a = 2$ ist der Grenzwert $x \notin \mathbb{Q}$, also ist $\mathbb{Q}$ *nicht vollständig*.

Der folgende Beweis (Tafel) dieser Tatsache ist bereits im X. Buch der “Elemente” Euklids zu finden (ca. 300 v.Chr.).

Satz 3 (Bolzano - Weierstraß)

Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Satz 4

Jede nach oben beschränkte, monoton steigende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist konvergent.

Satz 4

Jede nach oben beschränkte, monoton steigende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist konvergent.

Folgerung 1: Jede nach unten beschränkte, monoton fallende Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist konvergent.

Satz 4

Jede nach oben beschränkte, monoton steigende Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist konvergent.

Folgerung 1: Jede nach unten beschränkte, monoton fallende Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist konvergent.

Folgerung 2: Jede beschränkte und monotone Folge reeller Zahlen ist konvergent.

Definition: Intervallschachtelung

Eine Folge $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener Intervalle $J_n = [A_n, B_n]$ heißt eine *Intervallschachtelung*, falls

Definition: Intervallschachtelung

Eine Folge $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abgeschlossener Intervalle $J_n = [A_n, B_n]$ heißt eine *Intervallschachtelung*, falls

(1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $J_{n+1} \subset J_n$. („ $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist absteigend.")

Definition: Intervallschachtelung

Eine Folge $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener Intervalle $J_n = [A_n, B_n]$ heißt eine *Intervallschachtelung*, falls

(1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $J_{n+1} \subset J_n$. („ $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist absteigend.")

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} B_n - A_n = 0$.

Definition: Intervallschachtelung

Eine Folge $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener Intervalle $J_n = [A_n, B_n]$ heißt eine *Intervallschachtelung*, falls

(1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $J_{n+1} \subset J_n$. („ $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist absteigend.")

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} B_n - A_n = 0$.

Als weitere Folgerung aus dem Vollständigkeitsaxiom (V) erhalten wir:

Satz 5 (Intervallschachtelungsprinzip)

$(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Intervallschachtelung. Dann existiert genau eine

Zahl $c \in \mathbb{R}$, so dass $c \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n$.

Beispiel zu den Sätzen 4 und 5: Approximation der Eulerschen Zahl e

Wir betrachten die Folgen $(e_n)_n$ und $(e_n^*)_n$ mit

$$e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

und

$$e_n^* := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e_n.$$

Beispiel zu den Sätzen 4 und 5: Approximation der Eulerschen Zahl e

Wir betrachten die Folgen $(e_n)_n$ und $(e_n^*)_n$ mit

$$e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

und

$$e_n^* := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e_n.$$

Die Eulersche Zahl wird definiert als $e := \lim_{n \to \infty} e_n$.
$(e = 2,7182818....)$

Zwei wichtige Grenzwerte

(1) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty,$$

(2) $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Satz 6

Jede nach oben beschränkte Teilmenge $E \neq \emptyset$ von $\mathbb{R}$ besitzt in $\mathbb{R}$ ein Supremum.

Folgerung: Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge $E' \subset \mathbb{R}$ besitzt in $\mathbb{R}$ ein Infimum.

In diesem Zusammenhang wird die folgende *Konvention* benutzt:

(1) $\sup A := \infty$, falls $A \subset \mathbb{R}$ nach oben, $\inf A := -\infty$, falls $A \subset \mathbb{R}$ nach unten unbeschränkt ist;

(2) $\sup \emptyset := -\infty$, $\inf \emptyset := \infty$.

Hiermit und mit Satz 6 sind Supremum und Infimum für jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ festgelegt.