Analysis I

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/24

2.3 Exkurs: Folgen und Grenzwerte

Definition: M sei eine Menge. Eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to M, \quad n \mapsto a_n$$

heißt eine *Folge* mit Werten in M.

2.3 Exkurs: Folgen und Grenzwerte

Definition: M sei eine Menge. Eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to M, \quad n \mapsto a_n$$

heißt eine *Folge* mit Werten in M.

Schreibweise: $f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder kurz $f = (a_n)$,
mitunter auch aufzählend: $f = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

2.3 Exkurs: Folgen und Grenzwerte

Definition: M sei eine Menge. Eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to M, \quad n \mapsto a_n$$

heißt eine *Folge* mit Werten in M.

Schreibweise: $f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder kurz $f = (a_n)$,
mitunter auch aufzählend: $f = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

Bemerkung:
Auch Abbildungen $f : \mathbb{Z} \to M$ oder $f : \{n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0\} \to M$ werden als Folgen bezeichnet. In diesem Fall schreibt man $f = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ beziehungsweise $f = (a_n)_{n \geq n_0}$.

Beispiele

1. Zahlenfolgen ($M = \mathbb{C}$: komplexe Zahlenfolgen, entsprechend für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$)

Beispiele

1. Zahlenfolgen ($M = \mathbb{C}$: komplexe Zahlenfolgen, entsprechend für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$)

   1.1 $a_n = a \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge),

Beispiele

1. Zahlenfolgen ($M = \mathbb{C}$: komplexe Zahlenfolgen, entsprechend für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$)

1.1 $a_n = a \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge),

1.2 $a_n = \frac{1}{n}$, also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$,

Beispiele

1. Zahlenfolgen ($M = \mathbb{C}$: komplexe Zahlenfolgen, entsprechend für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$)

1.1 $a_n = a \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge),

1.2 $a_n = \frac{1}{n}$, also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$,

1.3 $a_n = b^n$ mit festem $b \in \mathbb{C}$ (geometrische Folge),

Beispiele

1. Zahlenfolgen ($M = \mathbb{C}$: komplexe Zahlenfolgen, entsprechend für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$)

1.1 $a_n = a \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge),

1.2 $a_n = \frac{1}{n}$, also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$,

1.3 $a_n = b^n$ mit festem $b \in \mathbb{C}$ (geometrische Folge),

1.4 $a_n = n!$, also $(a_n) = (1, 2, 6, 24, 120, \ldots)$,

Beispiele

1. Zahlenfolgen ($M = \mathbb{C}$: komplexe Zahlenfolgen, entsprechend für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$)

1.1 $a_n = a \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge),

1.2 $a_n = \frac{1}{n}$, also $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...)$,

1.3 $a_n = b^n$ mit festem $b \in \mathbb{C}$ (geometrische Folge),

1.4 $a_n = n!$, also $(a_n) = (1, 2, 6, 24, 120, ...)$,

1.5 rekursiv definierte Zahlenfolgen wie z.B. die Fibonacci-Zahlen $(f_n) = (0, 1, 1, 2, 3, 5, ...)$.

Weitere Beispiele

2. Mengenfolgen, z.B.:

Weitere Beispiele

2. Mengenfolgen, z.B.:

2.1 Folgen $((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ von Intervallen,

Weitere Beispiele

2. Mengenfolgen, z.B.:

2.1 Folgen $((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ von Intervallen,

2.2 Kreisflächenberechnung nach Archimedes durch Ausschöpfung mit regulären $2n$ - Ecken.

Weitere Beispiele

2. Mengenfolgen, z.B.:

2.1 Folgen $((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ von Intervallen,

2.2 Kreisflächenberechnung nach Archimedes durch Ausschöpfung mit regulären $2n$ - Ecken.

3. Folgen von Abbildungen, sogenannte "Funktionenfolgen", z.B.:

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_n(x) = x^n.$$

Definition: Konvergenz

(für Folgen komplexer Zahlen)

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt *konvergent* gegen $a \in \mathbb{C}$, falls gilt:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$.

In diesem Fall heißt die Zahl $a \in \mathbb{C}$ der *Grenzwert* (oder *Limes*) der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Schreibweisen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \longrightarrow a \quad (n \to \infty)$.

Weitere Bezeichnungen

Weitere Bezeichnungen

- Wir nennen eine Folge *konvergent*, wenn sie einen Grenzwert besitzt, andernfalls *divergent*.

Weitere Bezeichnungen

- Wir nennen eine Folge *konvergent*, wenn sie einen Grenzwert besitzt, andernfalls *divergent*.
- Eine Folge komplexer Zahlen, die gegen $a = 0$ konvergiert, heißt eine *Nullfolge*.

Weitere Bezeichnungen

- Wir nennen eine Folge *konvergent*, wenn sie einen Grenzwert besitzt, andernfalls *divergent*.
- Eine Folge komplexer Zahlen, die gegen $a = 0$ konvergiert, heißt eine *Nullfolge*.
- Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*, wenn die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ der Folgenglieder beschränkt ist.

Lemma 1

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Zahlenfolge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Dann gelten:

Lemma 1

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Zahlenfolge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Dann gelten:

(1) Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt.

Lemma 1

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Zahlenfolge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Dann gelten:

(1) Der Grenzwert ist eindeutig bestimmt.

(2) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Definition: Teilfolge

Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge

$$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$$

eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Lemma 2:

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gelten:

Lemma 2:

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gelten:

(1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt $\Rightarrow$ $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Lemma 2:

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gelten:

(1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt $\Rightarrow$ $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{C} \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Definition: Häufungswert

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. $a \in \mathbb{C}$ heißt ein *Häufungswert* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Lemma 3

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. $a \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Häufungswert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn in jeder ε - Umgebung

$$U_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}$$

unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegen.

Beispiele

Beispiele

(1) Sei $a_n = a \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge). Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, denn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiele

(1) Sei $a_n = a \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge). Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, denn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) $a_n = \dfrac{1}{n}$. Hier ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, denn für $n \geq N(\varepsilon) := \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ ist $|a_n - 0| = a_n = \dfrac{1}{n} < \varepsilon$. (Vgl. Folgerungen (1) und (2) aus (A)).

Beispiele

(1) Sei $a_n = a \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (konstante Folge). Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, denn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt: $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) $a_n = \frac{1}{n}$. Hier ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, denn für $n \geq N(\varepsilon) := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ ist $|a_n - 0| = a_n = \frac{1}{n} < \varepsilon$.
(Vgl. Folgerungen (1) und (2) aus (A)).

(3) Desgleichen für $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Hier wählt man $N(\varepsilon) := \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1$.

Weitere Beispiele

Weitere Beispiele

(4) Sei $q > 0$ und $a_n = (-q)^n$. Hier sind drei Fälle zu unterscheiden:

Weitere Beispiele

(4) Sei $q > 0$ und $a_n = (-q)^n$. Hier sind drei Fälle zu unterscheiden:

(4.1) $q < 1$: Nach Folgerung 5 aus dem Archimedes'schen Axiom wissen wir: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $q^N < \varepsilon$. Weil $0 < q < 1$ ist, gilt dann auch $q^n < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und damit $|a_n - 0| = q^n < \varepsilon$. Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Weitere Beispiele

(4) Sei $q > 0$ und $a_n = (-q)^n$. Hier sind drei Fälle zu unterscheiden:

(4.1) $q < 1$: Nach Folgerung 5 aus dem Archimedes'schen Axiom wissen wir: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $q^N < \varepsilon$. Weil $0 < q < 1$ ist, gilt dann auch $q^n < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und damit $|a_n - 0| = q^n < \varepsilon$. Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(4.2) $q = 1$. Hier zerfällt (a_n) in zwei konstante und also konvergente Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$, wobei $a_{2k} = 1 = -a_{2k-1}$.

Weitere Beispiele

(4) Sei $q > 0$ und $a_n = (-q)^n$. Hier sind drei Fälle zu unterscheiden:

(4.1) $q < 1$: Nach Folgerung 5 aus dem Archimedes'schen Axiom wissen wir: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass $q^N < \varepsilon$. Weil $0 < q < 1$ ist, gilt dann auch $q^n < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ und damit $|a_n - 0| = q^n < \varepsilon$. Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(4.2) $q = 1$. Hier zerfällt (a_n) in zwei konstante und also konvergente Teilfolgen $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$, wobei $a_{2k} = 1 = -a_{2k-1}$.

(4.3) $q > 1$. Nach Folgerung 4 aus (A) ist bekannt: Zu jedem $R > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $q^N > R$ und wegen $q > 1$ auch $q^n > R$ für alle $n \geq N$. Daher ist nicht nur (a_n) unbeschränkt, sondern auch jede Teilfolge. Es existiert also kein Häufungswert, insbesondere ist (a_n) divergent.

Und noch ein Beispiel

(5) Die Folge

$$(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \dots \right)$$

hat sogar *unendlich viele* Häufungswerte. Denn jedes $q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ wird unendlich oft angenommen und ist also ein Häufungswert. Es gilt sogar: Jedes $x \in [0,1]$ ist ein Häufungswert dieser Folge. (Beweis später.)

Rechenregeln für Grenzwerte (1): Ein Kriterium

Es seien (c_n) eine Folge komplexer Zahlen und $c \in \mathbb{C}$. Ferner gebe es $A, B \geq 0$ und Nullfolgen (a_n) und (b_n) nichtnegativer reeller Zahlen, so dass

$$|c_n - c| \leq Aa_n + Bb_n.$$

Dann gilt $\lim_{n \to \infty} c_n = c$.

Rechenregeln für Grenzwerte (2): Satz 1

Es seien (a_n) und (b_n) Folgen komplexer Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

Rechenregeln für Grenzwerte (2): Satz 1

Es seien (a_n) und (b_n) Folgen komplexer Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$,

Rechenregeln für Grenzwerte (2): Satz 1

Es seien (a_n) und (b_n) Folgen komplexer Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$,

Rechenregeln für Grenzwerte (2): Satz 1

Es seien (a_n) und (b_n) Folgen komplexer Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, falls $b, b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

Rechenregeln für Grenzwerte (2): Satz 1

Es seien (a_n) und (b_n) Folgen komplexer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$,

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$,

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, falls $b, b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(4) $\lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = \overline{a}$,

Rechenregeln für Grenzwerte (2): Satz 1

Es seien (a_n) und (b_n) Folgen komplexer Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$,

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, falls $b, b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{a_n} = \overline{a}$,

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

Bemerkung: Die Aussage des Satzes umfasst die Existenz der Grenzwerte auf der linken Seite.

Folgerungen und Anwendungen ..

(1) Sind (a_n) und (b_n) konvergente Zahlenfolgen und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, so ergeben die Regeln (1) und (2)

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n + \mu b_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n + \mu \lim_{n\to\infty} b_n.$$

In der Sprache der linearen Algebra bedeutet dies: Die Menge c aller konvergenten Folgen bildet einen Untervektorraum des Vektorraums aller komplexen Zahlenfolgen, und die Abbildung

$$\lim : c \to \mathbb{C}, \quad (a_n) \mapsto \lim_{n\to\infty} a_n$$

ist eine lineare Abbildung.

.. Folgerungen und Anwendungen ..

(2) Beispiel: Aus $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ folgt mit Regel (2), dass auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{n} = 0, \text{ allgemein: } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

(3) Beispiel: Sei $a_n = \frac{3n^2 + 7n}{n^2 - 2} = \frac{3 + \frac{7}{n}}{1 - \frac{2}{n^2}}$. Mit den Regeln (1), (2) und (3) ergibt sich $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

.. Folgerungen und Anwendungen ..

(4) Ist P ein Polynom, also $P(z) = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k z^k$, und (a_n) eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so erhalten wir durch wiederholte Anwendung der Regeln (1) und (2), dass $\lim_{n\to\infty} P(a_n) = P(a)$.

(5) Ist $R = \dfrac{P}{Q}$ eine rationale Funktion mit Polynomen P und Q, N die Nullstellenmenge von Q und (a_n) eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $a_n, a \notin N$, so ist $\lim_{n\to\infty} R(a_n) = R(a)$.

(6) Es seien (a_n) und (b_n) reelle Zahlenfolgen, $c_n = a_n + ib_n$ sowie $c = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ und } \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

.. Folgerungen und Anwendungen

(6) Es seien (a_n) und (b_n) reelle Zahlenfolgen, $c_n = a_n + ib_n$ sowie $c = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = a \textit{ und } \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Das bedeutet: Grenzwertbeweise für komplexe Zahlenfolgen können durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil reduziert werden auf solche für reelle Zahlenfolgen. Vorteil: Man kann sich für reelle Folgen die Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$ zunutze machen.

Lemma 4

(a_n) und (b_n) seien reelle Zahlenfolgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ und $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$. Dann folgt $a \leq b$.

Bemerkung: Aus $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ und $a_n < b_n$ folgt im allgemeinen *nicht*, dass $a < b$. Beispiel: $a_n = 0$ und $b_n = \dfrac{1}{n}$.

Satz 2 (Sandwich-Theorem):

Es seien (a_n), (b_n) und (c_n) reelle Zahlenfolgen mit

(1) $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$ und

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Dann konvergiert auch (c_n) und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

Anwendungen des Sandwich-Theorems:

Anwendungen des Sandwich-Theorems:

(1) $a_n = 0$, $c_n = \dfrac{n!}{n^n}$ und $b_n = \dfrac{1}{n}$. Dann ist $0 = a_n \le c_n \le b_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, also nach Satz 2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

Dieses Ergebnis folgt *nicht* aus den Rechenregeln für Grenzwerte, da die Anzahl der Faktoren gleich n ist, also über alle Grenzen wächst.

Anwendungen des Sandwich-Theorems:

(1) $a_n = 0$, $c_n = \dfrac{n!}{n^n}$ und $b_n = \dfrac{1}{n}$. Dann ist $0 = a_n \leq c_n \leq b_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, also nach Satz 2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

Dieses Ergebnis folgt *nicht* aus den Rechenregeln für Grenzwerte, da die Anzahl der Faktoren gleich n ist, also über alle Grenzen wächst.

(2) Es sei $0 \leq q < 1$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n n^k = 0$.

Weitere Eigenschaften *reeller* Zahlenfolgen

Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt

Weitere Eigenschaften *reeller* Zahlenfolgen

Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt

(1) *nach oben (unten) beschränkt*, wenn die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben (unten) beschränkt ist;

Weitere Eigenschaften *reeller* Zahlenfolgen

Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt

(1) *nach oben (unten) beschränkt*, wenn die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben (unten) beschränkt ist;

(2) *(streng) monoton steigend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_n < a_{n+1}$);

Weitere Eigenschaften *reeller* Zahlenfolgen

Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt

(1) *nach oben (unten) beschränkt*, wenn die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben (unten) beschränkt ist;

(2) *(streng) monoton steigend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_n < a_{n+1}$);

(3) *(streng) monoton fallend*, falls $(-a_n)$ (streng) monoton steigend ist;

Weitere Eigenschaften *reeller* Zahlenfolgen

Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt

(1) *nach oben (unten) beschränkt*, wenn die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben (unten) beschränkt ist;

(2) *(streng) monoton steigend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_n < a_{n+1}$);

(3) *(streng) monoton fallend*, falls $(-a_n)$ (streng) monoton steigend ist;

(4) *uneigentlich konvergent gegen ∞ $(-\infty)$*, wenn gilt: Für alle $R > 0$ existiert ein $N = N(R) \in \mathbb{N}$, so dass $a_n > R$ für alle $n \geq N$ (bzw. $a_n < -R$ für alle $n \geq N$).

Schreibweise: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$).