Analysis I

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/24

2.2 Anordnungsaxiome und Archimedes'sches Axiom

Definition: Ein Körper $(K, +, \cdot)$ heißt *angeordnet*, falls eine Teilmenge $K^+ \subset K$ existiert mit

2.2 Anordnungsaxiome und Archimedes'sches Axiom

Definition: Ein Körper $(K, +, \cdot)$ heißt *angeordnet*, falls eine Teilmenge $K^+ \subset K$ existiert mit

- (A1) Für alle $x \in K$ gilt genau eine der Beziehungen

  $$x \in K^+, \qquad -x \in K^+ \quad \text{oder} \quad x = 0;$$

2.2 Anordnungsaxiome und Archimedes'sches Axiom

Definition: Ein Körper $(K, +, \cdot)$ heißt *angeordnet*, falls eine Teilmenge $K^+ \subset K$ existiert mit

- (A1) Für alle $x \in K$ gilt genau eine der Beziehungen

  $$x \in K^+, \qquad -x \in K^+ \quad \text{oder} \quad x = 0;$$

- (A2) $x, y \in K^+ \Rightarrow x + y \in K^+$;

2.2 Anordnungsaxiome und Archimedes'sches Axiom

Definition: Ein Körper $(K, +, \cdot)$ heißt *angeordnet*, falls eine Teilmenge $K^+ \subset K$ existiert mit

- (A1) Für alle $x \in K$ gilt genau eine der Beziehungen

  $x \in K^+, \qquad -x \in K^+ \quad \text{oder} \quad x = 0;$

- (A2) $x, y \in K^+ \Rightarrow x + y \in K^+$;
- (A3) $x, y \in K^+ \Rightarrow xy \in K^+$.

Bemerkung: K^+ heißt die Menge der positiven Zahlen. (A2) und (A3) sagen aus, dass K^+ abgeschlossen ist unter $+$ und $\cdot$.

Definition: $<$- und $\leq$-Relation

Durch die Existenz der Menge K^+ ist in natürlicher Weise eine Anordnung auf K gegeben: Man erklärt

$$x < y :\Leftrightarrow y > x :\Leftrightarrow y - x \in K^+$$

und

$$x \leq y :\Leftrightarrow y \geq x :\Leftrightarrow x < y \text{ oder } x = y$$

Definition: $<$- und $\leq$-Relation

Durch die Existenz der Menge K^+ ist in natürlicher Weise eine Anordnung auf K gegeben: Man erklärt

$$x < y :\Leftrightarrow y > x :\Leftrightarrow y - x \in K^+$$

und

$$x \leq y :\Leftrightarrow y \geq x :\Leftrightarrow x < y \text{ oder } x = y$$

Wir verwenden auch die folgenden Bezeichnungen

- $K_0^+ := \{x \in K : x \geq 0\} = K^+ \cup \{0\}$,
- $K^- := \{x \in K : x < 0\}$.

Lemma 1

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Dann gelten für alle $x, y, z, a, b \in K$:

Lemma 1

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Dann gelten für alle $x, y, z, a, b \in K$:

- (1) $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$,

Lemma 1

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Dann gelten für alle $x, y, z, a, b \in K$:

- (1) $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$,
- (2) $x < y$ und $a < b \Rightarrow x + a < y + b$,

Lemma 1

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Dann gelten für alle $x, y, z, a, b \in K$:

- (1) $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$,
- (2) $x < y$ und $a < b \Rightarrow x + a < y + b$,
- (3) $x < y$ und $y < z \Rightarrow x < z$ (Transitivität),

Lemma 1

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Dann gelten für alle $x, y, z, a, b \in K$:

- (1) $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$,
- (2) $x < y$ und $a < b \Rightarrow x + a < y + b$,
- (3) $x < y$ und $y < z \Rightarrow x < z$ (Transitivität),
- (4) $x < y$ und $0 < a \Rightarrow ax < ay$,

Lemma 1

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Dann gelten für alle $x, y, z, a, b \in K$:

- (1) $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$,
- (2) $x < y$ und $a < b \Rightarrow x + a < y + b$,
- (3) $x < y$ und $y < z \Rightarrow x < z$ (Transitivität),
- (4) $x < y$ und $0 < a \Rightarrow ax < ay$,
- (5) $x < y$ und $a < 0 \Rightarrow ax > ay$,

Lemma 1

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Dann gelten für alle $x, y, z, a, b \in K$:

- (1) $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$,
- (2) $x < y$ und $a < b \Rightarrow x + a < y + b$,
- (3) $x < y$ und $y < z \Rightarrow x < z$ (Transitivität),
- (4) $x < y$ und $0 < a \Rightarrow ax < ay$,
- (5) $x < y$ und $a < 0 \Rightarrow ax > ay$,
- (6) $0 \leq x < y$ und $0 \leq a < b \Rightarrow ax < by$,

Lemma 1

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Dann gelten für alle $x, y, z, a, b \in K$:

- (1) $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$,
- (2) $x < y$ und $a < b \Rightarrow x + a < y + b$,
- (3) $x < y$ und $y < z \Rightarrow x < z$ (Transitivität),
- (4) $x < y$ und $0 < a \Rightarrow ax < ay$,
- (5) $x < y$ und $a < 0 \Rightarrow ax > ay$,
- (6) $0 \leq x < y$ und $0 \leq a < b \Rightarrow ax < by$,
- (7) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$, insbesondere ist $1 = 1^2 > 0$,

Lemma 1

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Dann gelten für alle $x, y, z, a, b \in K$:

- (1) $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$,
- (2) $x < y$ und $a < b \Rightarrow x + a < y + b$,
- (3) $x < y$ und $y < z \Rightarrow x < z$ (Transitivität),
- (4) $x < y$ und $0 < a \Rightarrow ax < ay$,
- (5) $x < y$ und $a < 0 \Rightarrow ax > ay$,
- (6) $0 \leq x < y$ und $0 \leq a < b \Rightarrow ax < by$,
- (7) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$, insbesondere ist $1 = 1^2 > 0$,
- (8) $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$,

Lemma 1

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper. Dann gelten für alle $x, y, z, a, b \in K$:

- (1) $x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$,
- (2) $x < y$ und $a < b \Rightarrow x + a < y + b$,
- (3) $x < y$ und $y < z \Rightarrow x < z$ (Transitivität),
- (4) $x < y$ und $0 < a \Rightarrow ax < ay$,
- (5) $x < y$ und $a < 0 \Rightarrow ax > ay$,
- (6) $0 \leq x < y$ und $0 \leq a < b \Rightarrow ax < by$,
- (7) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$, insbesondere ist $1 = 1^2 > 0$,
- (8) $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$,
- (9) $0 < x < y \Rightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

Bemerkungen:

Bemerkungen:

- (1) Der Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ mit der üblichen $<$-Relation ist angeordnet.

Bemerkungen:

- (1) Der Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ mit der üblichen $<$-Relation ist angeordnet.
- (2) Die reellen Zahlen fassen wir auf als einen Körper, der den Anordnungsaxiomen (A1) bis (A3) genügt. Wegen (1) ist dies für eine Charakterisierung noch nicht ausreichend.

Bemerkungen:

- (1) Der Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ mit der üblichen $<$-Relation ist angeordnet.
- (2) Die reellen Zahlen fassen wir auf als einen Körper, der den Anordnungsaxiomen (A1) bis (A3) genügt. Wegen (1) ist dies für eine Charakterisierung noch nicht ausreichend.
- (3) Es ist unmöglich, den Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ so anzuordnen, dass (A1) bis (A3) erfüllt sind. Denn es ist $i^2 = -1 < 0$, im Widerspruch zu Eigenschaft (7).

Lemma 2: Bernoullische Ungleichung

Es sei K ein angeordneter Körper und $x \in K$ mit $x \geq -1$. Dann gilt für jede natürliche Zahl n:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Definition: Beschränktheit

Es sei K ein angeordneter Körper und $\emptyset \neq A \subset K$.

Definition: Beschränktheit

Es sei K ein angeordneter Körper und $\emptyset \neq A \subset K$.

(1) A heißt *nach oben beschränkt*, falls ein $S \in K$ existiert, so dass $x \leq S$ für alle $x \in A$. In diesem Fall heißt S eine *obere Schranke* von A,

Definition: Beschränktheit

Es sei K ein angeordneter Körper und $\emptyset \neq A \subset K$.

(1) A heißt *nach oben beschränkt*, falls ein $S \in K$ existiert, so dass $x \leq S$ für alle $x \in A$. In diesem Fall heißt S eine *obere Schranke* von A,

(2) A heißt *nach unten beschränkt*, falls ein $s \in K$ existiert, so dass $x \geq s$ für alle $x \in A$. In diesem Fall heißt s eine *untere Schranke* von A,

Definition: Beschränktheit

Es sei K ein angeordneter Körper und $\emptyset \neq A \subset K$.

(1) A heißt *nach oben beschränkt*, falls ein $S \in K$ existiert, so dass $x \leq S$ für alle $x \in A$. In diesem Fall heißt S eine *obere Schranke* von A,

(2) A heißt *nach unten beschränkt*, falls ein $s \in K$ existiert, so dass $x \geq s$ für alle $x \in A$. In diesem Fall heißt s eine *untere Schranke* von A,

(3) A heißt *beschränkt*, wenn A nach oben und unten beschränkt ist.

Definition: Beschränktheit

Es sei K ein angeordneter Körper und $\emptyset \neq A \subset K$.

(1) A heißt *nach oben beschränkt*, falls ein $S \in K$ existiert, so dass $x \leq S$ für alle $x \in A$. In diesem Fall heißt S eine *obere Schranke* von A,

(2) A heißt *nach unten beschränkt*, falls ein $s \in K$ existiert, so dass $x \geq s$ für alle $x \in A$. In diesem Fall heißt s eine *untere Schranke* von A,

(3) A heißt *beschränkt*, wenn A nach oben und unten beschränkt ist.

Eine Menge A ist in jedem Fall nach oben beschränkt, wenn Sie ein größtes Element besitzt. Ein solches nennen wir das *Maximum* von A, Bezeichnung: $\max A$. Entsprechend ist $\min A$ das kleinste Element, also das Minimum von A. Solche Elemente existieren in der Regel *nicht*, selbst wenn A beschränkt ist! Bsp.: $(0, 1)$.

Definition: Supremum und Infimum

Es sei K ein angeordneter Körper und $\emptyset \neq A \subset K$.

Definition: Supremum und Infimum

Es sei K ein angeordneter Körper und $\emptyset \neq A \subset K$.

(1) $S \in K$ heißt das *Supremum* von A (in Zeichen: $S = \sup A = \sup_{x \in A} x$), falls gilt

   (i) $S \geq x$ für alle $x \in A$, das heißt, S ist *eine* obere Schranke von A, und

   (ii) ist $\tilde{S} \geq x$ für alle $x \in A$, so ist $\tilde{S} \geq S$, das heißt, S ist die *kleinste* obere Schranke von A.

Definition: Supremum und Infimum

Es sei K ein angeordneter Körper und $\emptyset \neq A \subset K$.

(1) $S \in K$ heißt das *Supremum* von A (in Zeichen: $S = \sup A = \sup_{x \in A} x$), falls gilt

  (i) $S \geq x$ für alle $x \in A$, das heißt, S ist *eine* obere Schranke von A, und

  (ii) ist $\tilde{S} \geq x$ für alle $x \in A$, so ist $\tilde{S} \geq S$, das heißt, S ist die *kleinste* obere Schranke von A.

(2) $s \in K$ heißt das *Infimum* von A (in Zeichen: $s = \inf A = \inf_{x \in A} x$), falls $-s = \sup(-A)$, wobei $-A := \{-x : x \in A\}$.

Bemerkungen:

Bemerkungen:

(1) inf A ist die *größte untere Schranke* von A.

Bemerkungen:

(1) inf A ist die *größte untere Schranke* von A.

(2) Falls existent, sind Supremum und Infimum eindeutig bestimmt.

Bemerkungen:

(1) inf A ist die *größte untere Schranke* von A.

(2) Falls existent, sind Supremum und Infimum eindeutig bestimmt.

(3) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ besitzt in $\mathbb{Q}$ weder ein Supremum noch ein Infimum (s. u.).

Bemerkungen:

(1) $\inf A$ ist die *größte untere Schranke* von A.

(2) Falls existent, sind Supremum und Infimum eindeutig bestimmt.

(3) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ besitzt in $\mathbb{Q}$ weder ein Supremum noch ein Infimum (s. u.).

(4) Besitzt eine Menge A ein Maximum (bzw. ein Minimum), so ist dies das Supremum (bzw. das Infimum) von A.

Der Satz des Archimedes

Ist die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, betrachtet als Teilmenge der angeordneten Körper $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ beschränkt ?

Für die rationalen Zahlen ist leicht einzusehen, dass dies nicht der Fall ist. Vielmehr gilt:

Satz (Archimedes): Zu $x, y \in \mathbb{Q}^+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $nx > y$.

Beweis: Tafel.

Wählen wir hierin $x = 1$, sehen wir: Zu jedem $y \in \mathbb{Q}^+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n > y$. Die Menge $\mathbb{N}$ besitzt also in $\mathbb{Q}$ keine obere Schranke.

Das Archimedes'sche Axiom

Für die reellen Zahlen können wir diese Eigenschaft aus den bisher festgelegten Axiomen nicht folgern. Wir werden sie daher als ein weiteres Axiom der reellen Zahlen postulieren.

Definition: Ein angeordneter Körper K heißt *Archimedes'sch angeordnet*, wenn für ihn das Archimedes'sche Axiom

(A) Für alle $x, y \in K^+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $nx > y$.

gilt.

Bemerkung: Es gibt angeordnete Körper, in denen das Axiom (A) *nicht* gilt. Es ist daher unabhängig von (A1) bis (A3).

Folgerungen aus dem Axiom (A)

Hier sei K ein Archimedes'sch angeordneter Körper, der $\mathbb{Q}$ enthält.
(Die nachstehenden Folgerungen gelten also insbes. für $K = \mathbb{R}$.)

Folgerungen aus dem Axiom (A)

Hier sei K ein Archimedes'sch angeordneter Körper, der $\mathbb{Q}$ enthält.
(Die nachstehenden Folgerungen gelten also insbes. für $K = \mathbb{R}$.)

(1) Zu jedem $x \in K$ existiert genau ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass $k \leq x < k + 1$. Dieses wird mit $[x]$ bezeichnet (ganzzahliger Anteil, "Gaussklammer").

Folgerungen aus dem Axiom (A)

Hier sei K ein Archimedes'sch angeordneter Körper, der $\mathbb{Q}$ enthält. (Die nachstehenden Folgerungen gelten also insbes. für $K = \mathbb{R}$.)

(1) Zu jedem $x \in K$ existiert genau ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass $k \leq x < k + 1$. Dieses wird mit $[x]$ bezeichnet (ganzzahliger Anteil, "Gaussklammer").

(2) Zu jedem $\varepsilon \in K^+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

Folgerungen aus dem Axiom (A)

Hier sei K ein Archimedes'sch angeordneter Körper, der $\mathbb{Q}$ enthält. (Die nachstehenden Folgerungen gelten also insbes. für $K = \mathbb{R}$.)

(1) Zu jedem $x \in K$ existiert genau ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass $k \leq x < k+1$. Dieses wird mit $[x]$ bezeichnet (ganzzahliger Anteil, "Gaussklammer").

(2) Zu jedem $\varepsilon \in K^+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

(3) Ist $x \in K$ mit $x < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $x \leq 0$.

Folgerungen aus dem Axiom (A)

Hier sei K ein Archimedes'sch angeordneter Körper, der $\mathbb{Q}$ enthält. (Die nachstehenden Folgerungen gelten also insbes. für $K = \mathbb{R}$.)

(1) Zu jedem $x \in K$ existiert genau ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass $k \leq x < k + 1$. Dieses wird mit $[x]$ bezeichnet (ganzzahliger Anteil, "Gaussklammer").

(2) Zu jedem $\varepsilon \in K^+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

(3) Ist $x \in K$ mit $x < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $x \leq 0$.

(4) Ist $q > 1$, so existiert zu jedem $R > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $q^n > R$.

Folgerungen aus dem Axiom (A)

Hier sei K ein Archimedes'sch angeordneter Körper, der $\mathbb{Q}$ enthält. (Die nachstehenden Folgerungen gelten also insbes. für $K = \mathbb{R}$.)

(1) Zu jedem $x \in K$ existiert genau ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass $k \leq x < k + 1$. Dieses wird mit $[x]$ bezeichnet (ganzzahliger Anteil, "Gaussklammer").

(2) Zu jedem $\varepsilon \in K^+$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

(3) Ist $x \in K$ mit $x < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $x \leq 0$.

(4) Ist $q > 1$, so existiert zu jedem $R > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $q^n > R$.

(5) Ist $0 < q < 1$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $0 < q^n < \varepsilon$.

Definition: Quadratwurzel

Zum Ende dieses Abschnitts soll noch der Absolutbetrag eingeführt und erklärt werden, was unter der Beschränktheit einer Menge komplexer Zahlen zu verstehen ist. Zur Vorbereitung definieren wir:

Für $a \in \mathbb{R}^+$ verstehen wir unter $\sqrt{a}$ die positive Lösung x der Gleichung $x^2 = a$. Ferner: $\sqrt{0} := 0$.

Bemerkungen:

Definition: Quadratwurzel

Zum Ende dieses Abschnitts soll noch der Absolutbetrag eingeführt und erklärt werden, was unter der Beschränktheit einer Menge komplexer Zahlen zu verstehen ist. Zur Vorbereitung definieren wir:

Für $a \in \mathbb{R}^+$ verstehen wir unter $\sqrt{a}$ die positive Lösung x der Gleichung $x^2 = a$. Ferner: $\sqrt{0} := 0$.

Bemerkungen:

(1) Die Existenz wird später gezeigt.

Definition: Quadratwurzel

Zum Ende dieses Abschnitts soll noch der Absolutbetrag eingeführt und erklärt werden, was unter der Beschränktheit einer Menge komplexer Zahlen zu verstehen ist. Zur Vorbereitung definieren wir:

Für $a \in \mathbb{R}^+$ verstehen wir unter $\sqrt{a}$ die positive Lösung x der Gleichung $x^2 = a$. Ferner: $\sqrt{0} := 0$.

Bemerkungen:

(1) Die Existenz wird später gezeigt.

(2) Es ist

$$b > a \Leftrightarrow 0 < b - a = (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a}) \Leftrightarrow \sqrt{b} > \sqrt{a}$$

und daher auch $b = a \Leftrightarrow \sqrt{b} = \sqrt{a}$. Insbesondere ist $\sqrt{a}$ eindeutig bestimmt.

Definition: Betrag einer komplexen Zahl

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ heißt

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

der *(Absolut-)Betrag* von z.

Bemerkung: Für $z = x \in \mathbb{R}$ ist

$$|z| = |x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & : \quad x \geq 0 \\ -x & : \quad n < x \leq 0 \end{cases}$$

Lemma 3:

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

Lemma 3:

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

(1) $|z| \geq 0$ mit $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,

Lemma 3:

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

(1) $|z| \geq 0$ mit $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,

(2) $|z| = |\overline{z}| = |-z|$,

Lemma 3:

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

(1) $|z| \geq 0$ mit $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,

(2) $|z| = |\overline{z}| = |-z|$,

(3) $|\text{Re } z| \leq |z|$ und $|\text{Im } z| \leq |z|$,

Lemma 3:

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

(1) $|z| \geq 0$ mit $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,

(2) $|z| = |\overline{z}| = |-z|$,

(3) $|\text{Re } z| \leq |z|$ und $|\text{Im } z| \leq |z|$,

(4) $|zw| = |z||w|$ und $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, falls $z \neq 0$,

Lemma 3:

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

(1) $|z| \geq 0$ mit $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,

(2) $|z| = |\overline{z}| = |-z|$,

(3) $|\mathrm{Re}\ z| \leq |z|$ und $|\mathrm{Im}\ z| \leq |z|$,

(4) $|zw| = |z||w|$ und $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, falls $z \neq 0$,

(5) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung),

Lemma 3:

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten:

(1) $|z| \geq 0$ mit $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,

(2) $|z| = |\overline{z}| = |-z|$,

(3) $|\text{Re } z| \leq |z|$ und $|\text{Im } z| \leq |z|$,

(4) $|zw| = |z||w|$ und $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, falls $z \neq 0$,

(5) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung),

(6) $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

Beweis: Tafel.

Definition: Beschränktheit in $\mathbb{C}$

$A \subset \mathbb{C}$ heißt beschränkt, wenn die Menge $\{|z| : z \in A\} \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist.

Bemerkung: Das ist genau dann der Fall, wenn ein $R > 0$ existiert, so dass $|z| \leq R$ für alle $z \in A$.