Analysis I

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/24

2. Axiomatische Charakterisierung der reellen Zahlen
2.1 Die Körperaxiome

Definition: M sei eine Menge. Eine Abbildung

$$\circ : M \times M \to M, \qquad (m_1, m_2) \mapsto m_1 \circ m_2$$

heißt eine *innere Verknüpfung* von M.

Beispiele: Die Addition $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (n, m) \mapsto n + m$ und die Multiplikation $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad (n, m) \mapsto n \cdot m$ sind innere Verknüpfungen von $\mathbb{N}$. Desgleichen für $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.

Definition: Gruppe

Ein Paar $(G, \circ)$, bestehend aus einer Menge $G \neq \emptyset$ und einer inneren Verknüpfung $\circ$ von G heißt eine *Gruppe*, falls gilt

Definition: Gruppe

Ein Paar $(G, \circ)$, bestehend aus einer Menge $G \neq \emptyset$ und einer inneren Verknüpfung $\circ$ von G heißt eine *Gruppe*, falls gilt

- (G1) Für alle $a, b, c \in G$ ist $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$. (Assoziativität)

Definition: Gruppe

Ein Paar $(G, \circ)$, bestehend aus einer Menge $G \neq \emptyset$ und einer inneren Verknüpfung $\circ$ von G heißt eine *Gruppe*, falls gilt

- (G1) Für alle $a, b, c \in G$ ist $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$. (Assoziativität)
- (G2) Es gibt ein Element $e \in G$, so dass $e \circ a = a$ für alle $a \in G$. (Neutrales Element)

Definition: Gruppe

Ein Paar $(G, \circ)$, bestehend aus einer Menge $G \neq \emptyset$ und einer inneren Verknüpfung $\circ$ von G heißt eine *Gruppe*, falls gilt

- (G1) Für alle $a, b, c \in G$ ist $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$. (Assoziativität)
- (G2) Es gibt ein Element $e \in G$, so dass $e \circ a = a$ für alle $a \in G$. (Neutrales Element)
- (G3) Zu jedem $a \in G$ existiert ein $b \in G$, so dass $b \circ a = e$. (Inverses Element zu $a \in G$)

Definition: Gruppe

Ein Paar $(G, \circ)$, bestehend aus einer Menge $G \neq \emptyset$ und einer inneren Verknüpfung $\circ$ von G heißt eine *Gruppe*, falls gilt

- (G1) Für alle $a, b, c \in G$ ist $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$. (Assoziativität)
- (G2) Es gibt ein Element $e \in G$, so dass $e \circ a = a$ für alle $a \in G$. (Neutrales Element)
- (G3) Zu jedem $a \in G$ existiert ein $b \in G$, so dass $b \circ a = e$. (Inverses Element zu $a \in G$)

Eine Gruppe heißt *kommutativ* (oder *Abelsch*), falls zusätzlich gilt

Definition: Gruppe

Ein Paar $(G, \circ)$, bestehend aus einer Menge $G \neq \emptyset$ und einer inneren Verknüpfung $\circ$ von G heißt eine *Gruppe*, falls gilt

- (G1) Für alle $a, b, c \in G$ ist $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$. (Assoziativität)
- (G2) Es gibt ein Element $e \in G$, so dass $e \circ a = a$ für alle $a \in G$. (Neutrales Element)
- (G3) Zu jedem $a \in G$ existiert ein $b \in G$, so dass $b \circ a = e$. (Inverses Element zu $a \in G$)

Eine Gruppe heißt *kommutativ* (oder *Abelsch*), falls zusätzlich gilt

- (G4) Für alle $a, b \in G$ ist $a \circ b = b \circ a$.

Bemerkungen und Beispiele

Bemerkungen und Beispiele

- Abkürzende Schreibweisen: G statt $(G, \circ)$ und ab statt $a \circ b$, wenn klar ist, welche innere Verknüpfung $\circ$ gemeint ist.

Bemerkungen und Beispiele

- Abkürzende Schreibweisen: G statt $(G, \circ)$ und ab statt $a \circ b$, wenn klar ist, welche innere Verknüpfung $\circ$ gemeint ist.
- Für die Analysis I sind fast ausschließlich die Abelschen Gruppen von Belang.

Bemerkungen und Beispiele

- Abkürzende Schreibweisen: G statt $(G, \circ)$ und ab statt $a \circ b$, wenn klar ist, welche innere Verknüpfung $\circ$ gemeint ist.
- Für die Analysis I sind fast ausschließlich die Abelschen Gruppen von Belang.
- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ sind Abelsche Gruppen; $(\mathbb{N}, +)$ nicht, hier fehlen das neutrale und folglich auch die inversen Elemente.

Bemerkungen und Beispiele

- Abkürzende Schreibweisen: G statt $(G, \circ)$ und ab statt $a \circ b$, wenn klar ist, welche innere Verknüpfung $\circ$ gemeint ist.
- Für die Analysis I sind fast ausschließlich die Abelschen Gruppen von Belang.
- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ sind Abelsche Gruppen; $(\mathbb{N}, +)$ nicht, hier fehlen das neutrale und folglich auch die inversen Elemente.
- $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ und $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ sind ebenfalls abelsche Gruppen, $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ hingegen nicht - wieder fehlen die Inversen. (Hierbei ist allgemein $M^* = M \setminus \{0\}$, wenn M eine Menge ist, die eine Null enthält.)

Lemma 1 (Einfache Eigenschaften (Abelscher) Gruppen)

Es sei G eine Abelsche Gruppe. Dann gelten:

Lemma 1 (Einfache Eigenschaften (Abelscher) Gruppen)

Es sei G eine Abelsche Gruppe. Dann gelten:

- (1) Das neutrale Element e ist eindeutig bestimmt.

Lemma 1 (Einfache Eigenschaften (Abelscher) Gruppen)

Es sei G eine Abelsche Gruppe. Dann gelten:

- (1) Das neutrale Element e ist eindeutig bestimmt.
- (2) Zu $a \in G$ existiert genau ein $b \in G$ mit $ab = ba = e$, dieses wird mit a^{-1} bezeichnet. (Eindeutigkeit des Inversen)

Lemma 1 (Einfache Eigenschaften (Abelscher) Gruppen)

Es sei G eine Abelsche Gruppe. Dann gelten:

- (1) Das neutrale Element e ist eindeutig bestimmt.
- (2) Zu $a \in G$ existiert genau ein $b \in G$ mit $ab = ba = e$, dieses wird mit a^{-1} bezeichnet. (Eindeutigkeit des Inversen)
- (3) Für alle $a, b \in G$ ist $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Lemma 1 (Einfache Eigenschaften (Abelscher) Gruppen)

Es sei G eine Abelsche Gruppe. Dann gelten:

- (1) Das neutrale Element e ist eindeutig bestimmt.
- (2) Zu $a \in G$ existiert genau ein $b \in G$ mit $ab = ba = e$, dieses wird mit a^{-1} bezeichnet. (Eindeutigkeit des Inversen)
- (3) Für alle $a, b \in G$ ist $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
- (4) $(a^{-1})^{-1} = a$, $e^{-1} = e$.

Lemma 1 (Einfache Eigenschaften (Abelscher) Gruppen)

Es sei G eine Abelsche Gruppe. Dann gelten:

- (1) Das neutrale Element e ist eindeutig bestimmt.
- (2) Zu $a \in G$ existiert genau ein $b \in G$ mit $ab = ba = e$, dieses wird mit a^{-1} bezeichnet. (Eindeutigkeit des Inversen)
- (3) Für alle $a, b \in G$ ist $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
- (4) $(a^{-1})^{-1} = a$, $e^{-1} = e$.
- (5) Für alle $a, x, y \in G$ gilt: $ax = ay \Leftrightarrow x = y$.

Lemma 1 (Einfache Eigenschaften (Abelscher) Gruppen)

Es sei G eine Abelsche Gruppe. Dann gelten:

- (1) Das neutrale Element e ist eindeutig bestimmt.
- (2) Zu $a \in G$ existiert genau ein $b \in G$ mit $ab = ba = e$, dieses wird mit a^{-1} bezeichnet. (Eindeutigkeit des Inversen)
- (3) Für alle $a, b \in G$ ist $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
- (4) $(a^{-1})^{-1} = a$, $e^{-1} = e$.
- (5) Für alle $a, x, y \in G$ gilt: $ax = ay \Leftrightarrow x = y$.
- (6) Zu $a, b \in G$ existiert genau ein $x \in G$, so dass $ax = b$. ("Die Gleichung $ax = b$ ist eindeutig lösbar.")

Lemma 1 (Einfache Eigenschaften (Abelscher) Gruppen)

Es sei G eine Abelsche Gruppe. Dann gelten:

- (1) Das neutrale Element e ist eindeutig bestimmt.
- (2) Zu $a \in G$ existiert genau ein $b \in G$ mit $ab = ba = e$, dieses wird mit a^{-1} bezeichnet. (Eindeutigkeit des Inversen)
- (3) Für alle $a, b \in G$ ist $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
- (4) $(a^{-1})^{-1} = a$, $e^{-1} = e$.
- (5) Für alle $a, x, y \in G$ gilt: $ax = ay \Leftrightarrow x = y$.
- (6) Zu $a, b \in G$ existiert genau ein $x \in G$, so dass $ax = b$. ("Die Gleichung $ax = b$ ist eindeutig lösbar.")

(Dieses Lemma gilt in vollem Umfang auch in nicht-Abelschen Gruppen.)

Definition: Körper

Ein Tripel $(K, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge $K \neq \emptyset$ und zwei inneren Verknüpfungen heißt ein *Körper*, falls gilt:

Definition: Körper

Ein Tripel $(K, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge $K \neq \emptyset$ und zwei inneren Verknüpfungen heißt ein *Körper*, falls gilt:

- (K1) Für alle $x, y, z \in K$ ist $(x + y) + z = x + (y + z)$.

Definition: Körper

Ein Tripel $(K, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge $K \neq \emptyset$ und zwei inneren Verknüpfungen heißt ein *Körper*, falls gilt:

- (K1) Für alle $x, y, z \in K$ ist $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- (K2) Für alle $x, y \in K$ gilt $x + y = y + x$.

Definition: Körper

Ein Tripel $(K, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge $K \neq \emptyset$ und zwei inneren Verknüpfungen heißt ein *Körper*, falls gilt:

- (K1) Für alle $x, y, z \in K$ ist $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- (K2) Für alle $x, y \in K$ gilt $x + y = y + x$.
- (K3) Es gibt $0 \in K$ mit $0 + x = x$ für alle $x \in K$.

Definition: Körper

Ein Tripel $(K, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge $K \neq \emptyset$ und zwei inneren Verknüpfungen heißt ein *Körper*, falls gilt:

- (K1) Für alle $x, y, z \in K$ ist $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- (K2) Für alle $x, y \in K$ gilt $x + y = y + x$.
- (K3) Es gibt $0 \in K$ mit $0 + x = x$ für alle $x \in K$.
- (K4) Zu $x \in K$ existiert ein $(-x) \in K$, so dass $(-x) + x = 0$.

Definition: Körper

Ein Tripel $(K, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge $K \neq \emptyset$ und zwei inneren Verknüpfungen heißt ein *Körper*, falls gilt:

- (K1) Für alle $x, y, z \in K$ ist $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- (K2) Für alle $x, y \in K$ gilt $x + y = y + x$.
- (K3) Es gibt $0 \in K$ mit $0 + x = x$ für alle $x \in K$.
- (K4) Zu $x \in K$ existiert ein $(-x) \in K$, so dass $(-x) + x = 0$.

- (K5) Für alle $x, y, z \in K$ ist $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

Definition: Körper

Ein Tripel $(K, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge $K \neq \emptyset$ und zwei inneren Verknüpfungen heißt ein *Körper*, falls gilt:

- (K1) Für alle $x, y, z \in K$ ist $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- (K2) Für alle $x, y \in K$ gilt $x + y = y + x$.
- (K3) Es gibt $0 \in K$ mit $0 + x = x$ für alle $x \in K$.
- (K4) Zu $x \in K$ existiert ein $(-x) \in K$, so dass $(-x) + x = 0$.

- (K5) Für alle $x, y, z \in K$ ist $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- (K6) Für alle $x, y \in K$ gilt $x \cdot y = y \cdot x$.

Definition: Körper

Ein Tripel $(K, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge $K \neq \emptyset$ und zwei inneren Verknüpfungen heißt ein *Körper*, falls gilt:

- (K1) Für alle $x, y, z \in K$ ist $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- (K2) Für alle $x, y \in K$ gilt $x + y = y + x$.
- (K3) Es gibt $0 \in K$ mit $0 + x = x$ für alle $x \in K$.
- (K4) Zu $x \in K$ existiert ein $(-x) \in K$, so dass $(-x) + x = 0$.

- (K5) Für alle $x, y, z \in K$ ist $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- (K6) Für alle $x, y \in K$ gilt $x \cdot y = y \cdot x$.
- (K7) Es gibt $1 \in K$ mit $1 \cdot x = x$ für alle $x \in K$.

Definition: Körper

Ein Tripel $(K, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge $K \neq \emptyset$ und zwei inneren Verknüpfungen heißt ein *Körper*, falls gilt:

- (K1) Für alle $x, y, z \in K$ ist $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- (K2) Für alle $x, y \in K$ gilt $x + y = y + x$.
- (K3) Es gibt $0 \in K$ mit $0 + x = x$ für alle $x \in K$.
- (K4) Zu $x \in K$ existiert ein $(-x) \in K$, so dass $(-x) + x = 0$.

- (K5) Für alle $x, y, z \in K$ ist $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- (K6) Für alle $x, y \in K$ gilt $x \cdot y = y \cdot x$.
- (K7) Es gibt $1 \in K$ mit $1 \cdot x = x$ für alle $x \in K$.
- (K8) Zu $x \in K^*$ existiert ein $x^{-1} \in K^*$, so dass $x^{-1} \cdot x = 1$.

Definition: Körper

Ein Tripel $(K, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge $K \neq \emptyset$ und zwei inneren Verknüpfungen heißt ein *Körper*, falls gilt:

- (K1) Für alle $x, y, z \in K$ ist $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- (K2) Für alle $x, y \in K$ gilt $x + y = y + x$.
- (K3) Es gibt $0 \in K$ mit $0 + x = x$ für alle $x \in K$.
- (K4) Zu $x \in K$ existiert ein $(-x) \in K$, so dass $(-x) + x = 0$.

- (K5) Für alle $x, y, z \in K$ ist $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- (K6) Für alle $x, y \in K$ gilt $x \cdot y = y \cdot x$.
- (K7) Es gibt $1 \in K$ mit $1 \cdot x = x$ für alle $x \in K$.
- (K8) Zu $x \in K^*$ existiert ein $x^{-1} \in K^*$, so dass $x^{-1} \cdot x = 1$.

- (K9) Für alle $x, y, z \in K$ ist $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Bemerkungen:

Bemerkungen:

- (1) Schreibweisen: xy statt $x \cdot y$, $x - y$ statt $x + (-y)$; falls $y \neq 0$: $\frac{x}{y}$ statt $y^{-1}x$.

Bemerkungen:

- (1) Schreibweisen: xy statt $x \cdot y$, $x - y$ statt $x + (-y)$;
falls $y \neq 0$: $\frac{x}{y}$ statt $y^{-1}x$.
- (2) Die Axiome (K1) bis (K4) heißen die "Axiome der Addition". Sie sind gleichbedeutend damit, dass $(K, +)$ eine Abelsche Gruppe ist.

Bemerkungen:

- (1) Schreibweisen: xy statt $x \cdot y$, $x - y$ statt $x + (-y)$; falls $y \neq 0$: $\frac{x}{y}$ statt $y^{-1}x$.
- (2) Die Axiome (K1) bis (K4) heißen die "Axiome der Addition". Sie sind gleichbedeutend damit, dass $(K, +)$ eine Abelsche Gruppe ist.
- (3) (K5) bis (K8) sind die Axiome der Multiplikation. Sie enthalten die Aussage, dass $(K^*, \cdot)$ eine Abelsche Gruppe ist.

Bemerkungen:

- (1) Schreibweisen: xy statt $x \cdot y$, $x - y$ statt $x + (-y)$; falls $y \neq 0$: $\frac{x}{y}$ statt $y^{-1}x$.
- (2) Die Axiome (K1) bis (K4) heißen die "Axiome der Addition". Sie sind gleichbedeutend damit, dass $(K, +)$ eine Abelsche Gruppe ist.
- (3) (K5) bis (K8) sind die Axiome der Multiplikation. Sie enthalten die Aussage, dass $(K^*, \cdot)$ eine Abelsche Gruppe ist.

Die einfachen Eigenschaften Abelscher Gruppen (Lemma 1) haben daher in Körpern die folgenden Entsprechungen:

Folgerung 1:

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Dann gelten:

- (1) 0 und 1 sind eindeutig bestimmt.
- (2) Zu gegebenem $x \in K$ sind das Negative $(-x)$ und das Inverse x^{-1} eindeutig bestimmt.
- (3) $-(x + y) = -x - y$ und, falls $x, y \in K^*$, $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$.
- (4) $-(-x) = x$, $-0 = 0$, $(x^{-1})^{-1} = x$ und $1^{-1} = 1$.
- (5) $a + x = a + y \Leftrightarrow x = y$ und, falls $a \neq 0$, $ax = ay \Leftrightarrow x = y$.
- (6) Die Gleichungen $a + x = b$ und, falls $a \neq 0$, $ax = b$ sind eindeutig lösbar.

Lemma 2:

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $x, y, z \in K$. Dann gelten:

Lemma 2:

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $x, y, z \in K$. Dann gelten:

- (1) $(x + y)z = xz + yz$,

Lemma 2:

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $x, y, z \in K$. Dann gelten:

- (1) $(x + y)z = xz + yz$,

- (2) $x \cdot 0 = 0$,

Lemma 2:

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $x, y, z \in K$. Dann gelten:

- (1) $(x + y)z = xz + yz$,
- (2) $x \cdot 0 = 0$,
- (3) $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $y = 0$ (Nullteilerfreiheit),

Lemma 2:

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $x, y, z \in K$. Dann gelten:

- (1) $(x + y)z = xz + yz$,
- (2) $x \cdot 0 = 0$,
- (3) $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $y = 0$ (Nullteilerfreiheit),
- (4) $(-x)y = -xy$, insbesondere $-y = (-1)y$,

Lemma 2:

Es seien $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $x, y, z \in K$. Dann gelten:

- (1) $(x + y)z = xz + yz$,
- (2) $x \cdot 0 = 0$,
- (3) $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $y = 0$ (Nullteilerfreiheit),
- (4) $(-x)y = -xy$, insbesondere $-y = (-1)y$,
- (5) $(-x)(-y) = xy$.

Der Körper $\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$ der komplexen Zahlen

Definition: Für $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} =: \mathbb{R}^2$ und $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ definieren wir

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v) \qquad \text{(Addition)}$$

und

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu) \qquad \text{(Multiplikation).}$$

(Auf der rechten Seite sind $+$ und das nicht ausgeschriebene $\cdot$ die Addition bzw. Multiplikation in den reellen Zahlen.)

Durch diese Definition wird auf der Ebene $\mathbb{R}^2$ tatsächlich eine Körperstruktur gegeben. Genauer gilt:

Satz 1:

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ist ein Körper mit Nullelement $0 := (0, 0)$ und Einselement $1 := (1, 0)$.
Das Negative von $z = (x, y)$ ist $-z := (-x, -y)$.
Für $z = (x, y) \neq 0$ ist das Inverse

$$z^{-1} := \frac{1}{z} := \Big(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\Big).$$

Beweis: Die geforderten Axiome werden auf die entsprechenden Eigenschaften der reellen Zahlen zurückgeführt. Anregung: Führen Sie die Einzelheiten aus für das Assoziativgesetz der Multiplikation und für das Distributivgesetz!

Bezeichnung: Der auf diese Weise definierte Körper wird mit $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ oder kurz mit $\mathbb{C}$ bezeichnet, seine Elemente heißen *komplexe Zahlen*.

Definition: Die imaginäre Einheit i

Die Zahl $i := (0, 1)$ heißt *imaginäre Einheit*.

Lemma 3: Es ist $i^2 = -1$ und $(x, y) = x + iy$.

Beweis: Tafel

Bemerkung: Mit dieser Schreibweise gehen die Definitionen von $+$ und $\cdot$ über in:

$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v),$$

$$(x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Definition: Real- und Imaginärteil, komplexe Konjugation

Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann heißen

Definition: Real- und Imaginärteil, komplexe Konjugation

Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann heißen

- $\operatorname{Re} z := x$ der *Realteil*,

Definition: Real- und Imaginärteil, komplexe Konjugation

Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann heißen

- $\operatorname{Re} z := x$ der *Realteil*,
- $\operatorname{Im} z := y$ der *Imaginärteil* von z und

Definition: Real- und Imaginärteil, komplexe Konjugation

Es sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Dann heißen

- $\operatorname{Re} z := x$ der *Realteil*,
- $\operatorname{Im} z := y$ der *Imaginärteil* von z und
- $\overline{z} := x - iy$ die zu z *konjugiert komplexe* Zahl.

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

Lemma 4:

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $w = u + iv \in \mathbb{C}$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ sind:

Lemma 4:

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $w = u + iv \in \mathbb{C}$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ sind:

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$,

Lemma 4:

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $w = u + iv \in \mathbb{C}$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ sind:

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$,
- $\frac{1}{2}(z + \overline{z}) = x$ und $\frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = y$,

Lemma 4:

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $w = u + iv \in \mathbb{C}$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ sind:

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$,
- $\frac{1}{2}(z + \overline{z}) = x$ und $\frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = y$,
- $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \quad (\subset \mathbb{C})$,

Lemma 4:

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $w = u + iv \in \mathbb{C}$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ sind:

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ und $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$,
- $\frac{1}{2}(z + \overline{z}) = x$ und $\frac{1}{2i}(z - \overline{z}) = y$,
- $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \quad (\subset \mathbb{C})$,
- $z\overline{z} = x^2 + y^2$ und $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}. \quad (z \neq 0)$

Der Beweis sei zur Übung empfohlen.

Summen und Produkte in Körpern

Für den Rest des Abschnitts sei $K = (K, +, \cdot)$ ein Körper.

Allgemein setzen wir für $n, m \in \mathbb{Z}$ und $x_k \in K$:

$$\sum_{k=m}^{n} x_k := \begin{cases} x_m + ... + x_n & : \quad n \geq m \\ 0 & : \quad n < m \text{ “leere Summe”} \end{cases}$$

und

$$\prod_{k=m}^{n} x_k := \begin{cases} x_m \cdot ... \cdot x_n & : \quad n \geq m \\ 1 & : \quad n < m \text{ “leeres Produkt”}, \end{cases}$$

wobei 0 und 1 die Körperelemente sind.

Verallgemeinerte Kommutativ- und Distributivgesetze

Lemma 5: Für $m \leq k \leq n$ und $n' \leq j \leq m'$ seien $x_k, y_j \in K$. Ferner sei $(i_m, \ldots, i_n)$ eine Umordnung von $(m, \ldots, n)$. Dann gelten:

(1) $\sum\limits_{k=m}^{n} x_{i_k} = \sum\limits_{k=m}^{n} x_k \quad \text{und} \quad \prod\limits_{k=m}^{n} x_{i_k} = \prod\limits_{k=m}^{n} x_k,$

(2) $\left(\sum\limits_{k=m}^{n} x_k\right)\left(\sum\limits_{j=m'}^{n'} y_j\right) = \sum\limits_{k=m}^{n}\sum\limits_{j=m'}^{n'} x_k y_j.$

(Ohne Beweis.)

Vielfache und Potenzen

Definition: Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in K$ setzen wir

$$n \cdot x := \sum_{k=1}^{n} x = \underbrace{x + ... + x}_{\text{n - mal}}, \qquad x^n := \prod_{k=1}^{n} x = \underbrace{x \cdot ... \cdot x}_{\text{n - mal}},$$

sowie $(-n)x := -nx$ und, für $x \neq 0$, $x^{-n} := (x^{-1})^n$.

Vielfache und Potenzen

Definition: Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in K$ setzen wir

$$n \cdot x := \sum_{k=1}^{n} x = \underbrace{x + ... + x}_{\text{n - mal}}, \qquad x^n := \prod_{k=1}^{n} x = \underbrace{x \cdot ... \cdot x}_{\text{n - mal}},$$

sowie $(-n)x := -nx$ und, für $x \neq 0$, $x^{-n} := (x^{-1})^n$.

Bemerkungen:

(1) $0 \cdot x = 0$ und $x^0 = 1$ in Übereinstimmung mit der Definition der leeren Summe und des leeren Produkts;

(2) $n \notin K$ ist möglich (endliche Körper !), insofern lässt sich die Definition des Vielfachen nicht aus den Axiomen folgern;

(3) es gelten die üblichen ...

... Rechenregeln:

$$(n+m)x = nx + mx, \qquad x^{n+m} = x^n x^m,$$

... Rechenregeln:

$$(n+m)x = nx + mx, \qquad x^{n+m} = x^n x^m,$$

$$n(x+y) = nx + ny, \qquad (xy)^n = x^n y^n,$$

... Rechenregeln:

$$(n+m)x = nx + mx, \qquad x^{n+m} = x^n x^m,$$

$$n(x+y) = nx + ny, \qquad (xy)^n = x^n y^n,$$

$$(nm)x = n(mx), \qquad x^{nm} = (x^m)^n.$$

(Auch dies ohne Beweis.)

Satz 2 (Geometrische Summenformel):

Es sei $x \in K \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Satz 3 (Binomischer Lehrsatz):

Es sei $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Satz 3 (Binomischer Lehrsatz):

Es sei $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Folgerungen:

(1) Für $a, b \in K$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

(2) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \delta_{n,0} := \begin{cases} 1 & : \quad n = 0 \\ 0 & : \quad n \neq 0 \end{cases},$

(3) $\# M = n \Rightarrow \# \mathcal{P}(M) = 2^n$.