Analysis I

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/24

1.2 Die natürlichen Zahlen und das Induktionsprinzip

Wenn wir die natürlichen Zahlen in der üblichen Form

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

anschreiben, bedeuten die ..., dass es einen wohldefinierten Zählvorgang gibt, der jeder natürlichen Zahl in eindeutiger Weise einen Nachfolger zuordnet. Dies ist die wesentliche Eigenschaft der natürlichen Zahlen.

Mit Hilfe der Grundbegriffe "Menge" und "Abbildung" können wir hieraus eine vollständige Charakterisierung der natürlichen Zahlen gewinnen:

Axiomatische Charakterisierung der natürlichen Zahlen (Dedekind, 1888; Peano 1889):

Die natürlichen Zahlen bilden eine Menge $\mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften:

Axiomatische Charakterisierung der natürlichen Zahlen (Dedekind, 1888; Peano 1889):

Die natürlichen Zahlen bilden eine Menge $\mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (P1) Es gibt eine Element $1 \in \mathbb{N}$.

Axiomatische Charakterisierung der natürlichen Zahlen (Dedekind, 1888; Peano 1889):

Die natürlichen Zahlen bilden eine Menge $\mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (P1) Es gibt eine Element $1 \in \mathbb{N}$.
- (P2) Es gibt eine Abbildung $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass

Axiomatische Charakterisierung der natürlichen Zahlen (Dedekind, 1888; Peano 1889):

Die natürlichen Zahlen bilden eine Menge $\mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (P1) Es gibt eine Element $1 \in \mathbb{N}$.
- (P2) Es gibt eine Abbildung $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass
- (P3) $1 \notin \nu(\mathbb{N})$,

Axiomatische Charakterisierung der natürlichen Zahlen (Dedekind, 1888; Peano 1889):

Die natürlichen Zahlen bilden eine Menge $\mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (P1) Es gibt eine Element $1 \in \mathbb{N}$.
- (P2) Es gibt eine Abbildung $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass
- (P3) $1 \notin \nu(\mathbb{N})$,
- (P4) ν ist injektiv,

Axiomatische Charakterisierung der natürlichen Zahlen (Dedekind, 1888; Peano 1889):

Die natürlichen Zahlen bilden eine Menge $\mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (P1) Es gibt eine Element $1 \in \mathbb{N}$.
- (P2) Es gibt eine Abbildung $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass
- (P3) $1 \notin \nu(\mathbb{N})$,
- (P4) ν ist injektiv,
- (P5) ist $M \subset \mathbb{N}$ mit $1 \in M$ und $\nu(M) \subset M$, so gilt bereits $M = \mathbb{N}$.

Eindeutigkeitssatz (Dedekind,1888):

Ist $\mathbb{N}'$ eine Menge mit einem ausgezeichneten Element $1' \in \mathbb{N}'$ und einer Abbildung $\nu' : \mathbb{N}' \to \mathbb{N}'$, die den Axiomen (P3) bis (P5) genügt, so existiert eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ mit $\varphi(1) = 1'$ und $\varphi \circ \nu = \nu' \circ \varphi$.

(Ebbinghaus et al., "Zahlen", Kap. 1, §2)

Die Abbildung φ wird als Isomorphismus bezeichnet, das bedeutet "strukturerhaltende Abbildung". Ihre Eigenschaften hängen von der jeweiligen Struktur ab, welche abgebildet wird!

Das “Induktionsaxiom” (P5) ..

.. liefert ein sehr nützliches Beweisverfahren, den Induktionsbeweis. Um dies zu erläutern, schreiben wir $\nu(n) = n + 1$ und formulieren (P5) etwas um:

(P5') Ist $M \subset \mathbb{N}$ eine Menge mit $1 \in M$ und der Eigenschaft

$$n \in M \Rightarrow n + 1 \in M,$$

so gilt bereits $M = \mathbb{N}$.

Satz (Induktionsprinzip, 1. Version)

Es sei $n_0 \in \mathbb{Z}$, und für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Hierfür gelte:

Satz (Induktionsprinzip, 1. Version)

Es sei $n_0 \in \mathbb{Z}$, und für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Hierfür gelte:

- (1) $A(n_0)$ ist wahr.

Satz (Induktionsprinzip, 1. Version)

Es sei $n_0 \in \mathbb{Z}$, und für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Hierfür gelte:

- (1) $A(n_0)$ ist wahr.
- (2) Für alle $n \geq n_0$ folgt $A(n+1)$ aus $A(n)$.

Satz (Induktionsprinzip, 1. Version)

Es sei $n_0 \in \mathbb{Z}$, und für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Hierfür gelte:

- (1) $A(n_0)$ ist wahr.
- (2) Für alle $n \geq n_0$ folgt $A(n+1)$ aus $A(n)$.

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Satz (Induktionsprinzip, 1. Version)

Es sei $n_0 \in \mathbb{Z}$, und für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Hierfür gelte:

- (1) $A(n_0)$ ist wahr.
- (2) Für alle $n \geq n_0$ folgt $A(n+1)$ aus $A(n)$.

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Beweis: Wende (P5') an auf die Menge

$$M = \{n \in \mathbb{N} : A(n + n_0 - 1) \text{ ist wahr } \}.$$

Satz (Induktionsprinzip, 2. Version)

Ist $M \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit

Satz (Induktionsprinzip, 2. Version)

Ist $M \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit

- (1) $1 \in M$,

Satz (Induktionsprinzip, 2. Version)

Ist $M \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit

- (1) $1 \in M$,
- (2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\{1, \ldots, n\} \subset M \Rightarrow n + 1 \in M$.

Satz (Induktionsprinzip, 2. Version)

Ist $M \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit

- (1) $1 \in M$,
- (2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\{1, \ldots, n\} \subset M \Rightarrow n + 1 \in M$.

Dann ist bereits $M = \mathbb{N}$.

Satz (Induktionsprinzip, 2. Version)

Ist $M \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit

- (1) $1 \in M$,
- (2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\{1, \ldots, n\} \subset M \Rightarrow n + 1 \in M$.

Dann ist bereits $M = \mathbb{N}$.

Folgerung: Ist $A(n)$ eine Aussage, so dass gilt

- (1) Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{Z}$, für dass $A(n_0)$ wahr ist,
- (2) für alle $n \geq n_0$ gilt $A(n_0), \ldots, A(n) \Rightarrow A(n + 1)$.

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \geq n_0$.