Analysis I

Apl. Prof. Dr. Axel Grünrock

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2023/24

1. Grundlagen
1.1 Mengen und Abbildungen

Definition (Cantor, 1895): "Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen."

1. Grundlagen
1.1 Mengen und Abbildungen

Definition (Cantor, 1895): "Unter einer *Menge* verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen."

Zusatz zur Definition: Hierbei muss prinzipiell entscheidbar sein, ob ein Objekt zu einer Menge M gehört oder nicht.

Beispiel: Die "Russellsche Unmenge"

Nicht jede Angabe einer charakterisierenden Eigenschaft führt zu einer wohldefinierten Menge! Die Menge

$$M_R := \{x : x \text{ ist eine Menge und } x \notin x\}$$

aller Mengen, die sich selbst *nicht* als Element enthalten, ist zweifellos eine "Zusammenfassung von Objekten unseres Denkens", genügt also der Cantorschen Mengendefinition. Aber gehört M_R als Element zu M_R ?

Fortsetzung "Russellsche Unmenge“

Nehmen wir dies an, folgt sofort das Gegenteil:

$$M_R \in M_R = \{x : x \notin x\} \Rightarrow M_R \notin M_R,$$

umgekehrt entsprechend:

$$M_R \notin M_R = \{x : x \notin x\} \Rightarrow \neg(M_R \notin M_R) = M_R \in M_R.$$

Die Frage, ob M_R ein Element von M_R ist, *kann* also gar nicht entschieden werden.

Zahlenmengen, die in Analysis I von Bedeutung sind

Zahlenmengen, die in Analysis I von Bedeutung sind

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, die *natürlichen* Zahlen,

Zahlenmengen, die in Analysis I von Bedeutung sind

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, die *natürlichen* Zahlen,
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, die *natürlichen* Zahlen *mit* 0,

Zahlenmengen, die in Analysis I von Bedeutung sind

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, die *natürlichen* Zahlen,
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, die *natürlichen* Zahlen *mit* 0,
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, die *ganzen* Zahlen,

Zahlenmengen, die in Analysis I von Bedeutung sind

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, die *natürlichen* Zahlen,
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, die *natürlichen* Zahlen *mit* 0,
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, die *ganzen* Zahlen,
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$, die *rationalen* Zahlen,

Zahlenmengen, die in Analysis I von Bedeutung sind

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, die *natürlichen* Zahlen,
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, die *natürlichen* Zahlen *mit* 0,
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, die *ganzen* Zahlen,
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$, die *rationalen* Zahlen,
- $\mathbb{R} = \{\pm a, a_1 a_2 a_3 \cdots : a \in \mathbb{N}_0, a_1, a_2, \dots \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}\}$, die *reellen* Zahlen, die wir im Moment als Dezimalbrüche (abbrechend **und** nicht-abbrechend) auffassen. (Dazu später wesentlich mehr.)

Intervalle

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ definiert man

Intervalle

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ definiert man

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, ein *abgeschlossenes* Intervall,

Intervalle

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ definiert man

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, ein *abgeschlossenes* Intervall,
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, ein *offenes* Intervall,

Intervalle

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ definiert man

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, ein *abgeschlossenes* Intervall,
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, ein *offenes* Intervall,
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ und
  $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, das sind *halboffene* Intervalle.

Intervalle

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ definiert man

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, ein *abgeschlossenes* Intervall,
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, ein *offenes* Intervall,
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ und
  $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, das sind *halboffene* Intervalle.

Ferner benutzt man oft uneigentliche (= unbeschränkte) Intervalle wie z. B.:

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \quad \text{oder} \quad (-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}.$$

Definition: Teilmenge und Mengengleichheit

Definition: Teilmenge und Mengengleichheit

- (1) Eine Menge M_1 heißt *Teilmenge* einer Menge M_2, falls alle Elemente von M_1 in M_2 enthalten sind.

Definition: Teilmenge und Mengengleichheit

- (1) Eine Menge M_1 heißt *Teilmenge* einer Menge M_2, falls alle Elemente von M_1 in M_2 enthalten sind.

- Schreibweise: $M_1 \subset M_2$, falls gilt: $x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$.

Definition: Teilmenge und Mengengleichheit

- (1) Eine Menge M_1 heißt *Teilmenge* einer Menge M_2, falls alle Elemente von M_1 in M_2 enthalten sind.
- Schreibweise: $M_1 \subset M_2$, falls gilt: $x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$.
- (2) Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen *gleich*, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Definition: Teilmenge und Mengengleichheit

- (1) Eine Menge M_1 heißt *Teilmenge* einer Menge M_2, falls alle Elemente von M_1 in M_2 enthalten sind.
- Schreibweise: $M_1 \subset M_2$, falls gilt: $x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$.
- (2) Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen *gleich*, wenn sie dieselben Elemente enthalten.
- Kurz: $M_1 = M_2 :\Leftrightarrow M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_1$.

Die leere Menge

Definition: Die *leere Menge* ist diejenige Menge, welche kein Element enthält. Sie wird mit $\emptyset$ oder $\{\}$ bezeichnet.

Die leere Menge

Definition: Die *leere Menge* ist diejenige Menge, welche kein Element enthält. Sie wird mit $\emptyset$ oder $\{\}$ bezeichnet.

Bemerkung: Für jede Menge M gilt $\emptyset \subset M$.

Definition: Mengenverknüpfungen

M_1 und M_2 seien Mengen. Dann heißen:

Definition: Mengenverknüpfungen

M_1 und M_2 seien Mengen. Dann heißen:

- $M_1 \cup M_2 := \{x : x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$ die *Vereinigung*,

Definition: Mengenverknüpfungen

M_1 und M_2 seien Mengen. Dann heißen:

- $M_1 \cup M_2 := \{x : x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$ die *Vereinigung*,
- $M_1 \cap M_2 := \{x : x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$ der *(Durch-)schnitt*,

Definition: Mengenverknüpfungen

M_1 und M_2 seien Mengen. Dann heißen:

- $M_1 \cup M_2 := \{x : x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$ die *Vereinigung*,
- $M_1 \cap M_2 := \{x : x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$ der *(Durch-)schnitt*,
- $M_1 \setminus M_2 := \{x : x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$ die *Differenz* und

Definition: Mengenverknüpfungen

M_1 und M_2 seien Mengen. Dann heißen:

- $M_1 \cup M_2 := \{x : x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$ die *Vereinigung*,
- $M_1 \cap M_2 := \{x : x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$ der *(Durch-)schnitt*,
- $M_1 \setminus M_2 := \{x : x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$ die *Differenz* und
- $M_1 \Delta M_2 := (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$ die *symmetrische Differenz*

der Mengen M_1 und M_2.

Satz 1 (Rechenregeln für Mengenverknüpfungen)

M_1, M_2 und M_3 seien Mengen. Dann gelten:

Satz 1 (Rechenregeln für Mengenverknüpfungen)

M_1, M_2 und M_3 seien Mengen. Dann gelten:

- $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$, $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$, *(Kommutativität)*;

Satz 1 (Rechenregeln für Mengenverknüpfungen)

M_1, M_2 und M_3 seien Mengen. Dann gelten:

- $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$, $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$, *(Kommutativität)*;
- $M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$, desgleichen für $\cap$, *(Assoziativität)*;

Satz 1 (Rechenregeln für Mengenverknüpfungen)

M_1, M_2 und M_3 seien Mengen. Dann gelten:

- $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$, $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$, *(Kommutativität)*;
- $M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$, desgleichen für $\cap$, *(Assoziativität)*;
- $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$, das erste und

Satz 1 (Rechenregeln für Mengenverknüpfungen)

M_1, M_2 und M_3 seien Mengen. Dann gelten:

- $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$, $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$, *(Kommutativität)*;
- $M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$, desgleichen für $\cap$, *(Assoziativität)*;
- $M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$, das erste und
- $M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$, das zweite *Distributivgesetz*.

Definition: Potenzmenge und Mengensystem

X sei eine Menge. Dann heißt (die Menge aller Teilmengen von X)

$$\mathcal{P}(X) := \{M : M \subset X\}$$

die *Potenzmenge* von X. Eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ein *Mengensystem* auf X.

Definition: Potenzmenge und Mengensystem

X sei eine Menge. Dann heißt (die Menge aller Teilmengen von X)

$$\mathcal{P}(X) := \{M : M \subset X\}$$

die *Potenzmenge* von X. Eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ein *Mengensystem* auf X.

Beispiele:

- Für $X = \emptyset$ ist $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ $(\neq \emptyset)$.

Definition: Potenzmenge und Mengensystem

X sei eine Menge. Dann heißt (die Menge aller Teilmengen von X)

$$\mathcal{P}(X) := \{M : M \subset X\}$$

die *Potenzmenge* von X. Eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ein *Mengensystem* auf X.

Beispiele:

- Für $X = \emptyset$ ist $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ ($\neq \emptyset$).
- $X = \{1, 2, 3\}$. Dann ist $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Definition: Komplement einer Teilmenge

X sei eine Menge und $M \subset X$ eine Teilmenge. Dann heißt

$$M^c := X \setminus M = \{x \in X : x \notin M\}$$

das *Komplement von M in X*.

Definition: Beliebige Vereinigungen und Durchschnitte

Es seien X eine Menge und $\mathcal{M}$ ein Mengensystem auf X. Dann setzen wir

$$\bigcup_{M\in\mathcal{M}} M := \{x \in X : \text{ Es gibt ein } M \in \mathcal{M} \text{ mit } x \in M\}$$

und $$\bigcap_{M\in\mathcal{M}} M := \{x \in X : x \in M \text{ für alle } M \in \mathcal{M}\}.$$

Definition: Beliebige Vereinigungen und Durchschnitte

Es seien X eine Menge und $\mathcal{M}$ ein Mengensystem auf X. Dann setzen wir

$$\bigcup_{M\in\mathcal{M}} M := \{x \in X : \text{ Es gibt ein } M \in \mathcal{M} \text{ mit } x \in M\}$$

und $$\bigcap_{M\in\mathcal{M}} M := \{x \in X : x \in M \text{ für alle } M \in \mathcal{M}\}.$$

Bezeichnung: Ist $\mathcal{M} = \{M_i : i \in I\}$ mit einer (sog.) Indexmenge I, so schreibt man $\bigcup_{i\in I} M_i := \bigcup_{M\in\mathcal{M}} M$ bzw. $\bigcap_{i\in I} M_i := \bigcap_{M\in\mathcal{M}} M$. Am häufigsten verwendet man $\mathbb{N}$ als Indexmenge, aber auch "größere" Mengen I sind mitunter erforderlich.

Satz 2 (De Morgan'sche Regeln):

Es sei $\mathcal{M}$ ein Mengensystem auf einer Menge X. Dann gelten:

$$\left(\bigcup_{M\in\mathcal{M}} M\right)^c = \bigcap_{M\in\mathcal{M}} M^c$$

Satz 2 (De Morgan'sche Regeln):

Es sei $\mathcal{M}$ ein Mengensystem auf einer Menge X. Dann gelten:

$$\left(\bigcup_{M\in\mathcal{M}} M\right)^c = \bigcap_{M\in\mathcal{M}} M^c$$

und

$$\left(\bigcap_{M\in\mathcal{M}} M\right)^c = \bigcup_{M\in\mathcal{M}} M^c$$

Beweis als Übungsaufgabe!

Definition: Das kartesische Produkt

X und Y seien Mengen. Dann heißt

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

das *kartesische Produkt* von X und Y. Seine Elemente werden als *geordnete Paare* bezeichnet.

Definition: Das kartesische Produkt

X und Y seien Mengen. Dann heißt

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

das *kartesische Produkt* von X und Y. Seine Elemente werden als *geordnete Paare* bezeichnet.

Verallgemeinerung: Sind X_1, X_2, ..., X_n Mengen, so heißt

$$\mathsf{X}_{i=1}^{n} X_i := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in X_i \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\}\}$$

das kartesische Produkt von X_1 bis X_n. Seine Elemente werden als (geordnete) n-Tupel bezeichnet (im Fall $n = 3$ auch als Tripel).

Definition: Abbildung/Funktion

Gegeben seien zwei Mengen X und Y. Unter einer *Abbildung* oder *Funktion* f von X nach Y versteht man eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y = f(x) \in Y$ zuordnet.

Definition: Abbildung/Funktion

Gegeben seien zwei Mengen X und Y. Unter einer *Abbildung* oder *Funktion* f von X nach Y versteht man eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y = f(x) \in Y$ zuordnet.

Bemerkung: Eine Abbildung wird erst vollständig charakterisiert durch Angabe von Definitionsbereich, Zielbereich und Zuordnungsvorschrift, üblicherweise in der Form

$$f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)(:= \dots \text{ Zuordnungsvorschrift }).$$

Abbildungen mit gleicher Zuordnungsvorschrift aber unterschiedlichen Definitions- und/oder Zielbereichen können sich in wesentlichen Eigenschaften unterscheiden!

Definition: Abbildung (2. Versuch)

Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist eine Teilmenge $G_f \subset X \times Y$, so dass zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in G_f$ existiert. Dieses Element $y \in Y$ wird als $f(x)$ bezeichnet.

Definition: Bild und Urbild

Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $M \subset X$ und $N \subset Y$. Dann heißen

- (1) $f(M) := \{f(x) \in Y : x \in M\}$ das *Bild* von M unter f und
- (2) $f^{-1}(N) := \{x \in X : f(x) \in N\}$ das *Urbild* von N unter f.

Definition: Bild und Urbild

Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $M \subset X$ und $N \subset Y$. Dann heißen

- (1) $f(M) := \{f(x) \in Y : x \in M\}$ das *Bild* von M unter f und
- (2) $f^{-1}(N) := \{x \in X : f(x) \in N\}$ das *Urbild* von N unter f.

Speziell: $f(X)$ heißt der *Wertebereich* oder das *Bild* von f. Im allgemeinen ist der Wertebereich eine echte Teilmenge des Zielbereichs, d. h. wir haben $f(X) \subsetneq Y$.

Satz 3

Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(Y)$ seien Mengensysteme auf X beziehungsweise auf Y. Dann gelten:

- (1.1) $f\left(\bigcup_{M\in\mathcal{M}} M\right) = \bigcup_{M\in\mathcal{M}} f(M)$,
- (1.2) $f\left(\bigcap_{M\in\mathcal{M}} M\right) \subset \bigcap_{M\in\mathcal{M}} f(M)$;
- (2.1) $f^{-1}\left(\bigcup_{N\in\mathcal{N}} N\right) = \bigcup_{N\in\mathcal{N}} f^{-1}(N)$,
- (2.2) $f^{-1}\left(\bigcap_{N\in\mathcal{N}} N\right) = \bigcap_{N\in\mathcal{N}} f^{-1}(N)$.

Definition: injektiv, surjektiv und bijektiv

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

Definition: injektiv, surjektiv und bijektiv

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

- *injektiv*, falls für $x_1, x_2 \in X$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;

Definition: injektiv, surjektiv und bijektiv

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt

- *injektiv*, falls für $x_1, x_2 \in X$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;
- *surjektiv*, wenn zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, so dass $y = f(x)$;
- *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Definition: Verknüpfung/Komposition von Abbildungen

Es seien X, Y und Z Mengen, $g : X \to Y$ und $f : Y \to Z$ Abbildungen. Dann ist ihre *Verknüpfung (Verkettung, Komposition)* $f \circ g$ (gelesen: “f nach g“) definiert durch

$$f \circ g : X \to Z \qquad x \mapsto f \circ g(x) := f(g(x)).$$

Definition: Inverse Abbildung

Es sei $f : X \to Y$ bijektiv. Dann heißt die Abbildung

$$f^{-1} : Y \to X, \quad y \mapsto f^{-1}(y),$$

definiert durch $f^{-1}(y) = x$, falls $f(x) = y$, die *Inverse* (oder *Umkehrabbildung*) von f.