Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

45	46	47	48	49*	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I
BLATT 12

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 45 (4 Punkte, Regel von de L'Hôpital)

(a) Die Funktionen f und g seien in einer Umgebung des Punktes $x_0 \in \mathbb{R}$ $n+1$-mal stetig differenzierbar. Ferner gelte $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0$ für $0 \leq k \leq n$ sowie $g^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{g^{(n+1)}(x_0)}.$$

(b) Mit Hilfe von (a) bestimme man den Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \frac{\alpha}{1 - x^\alpha} - \frac{\beta}{1 - x^\beta}.$$

Aufgabe 46 (4 Punkte) Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \frac{x}{\sqrt{2}} - \sin^2(x).$$

Besitzt f globale Extrema?

Aufgabe 47 (4 Punkte) Für $x \in \mathbb{R}$ sei $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Untersuchen Sie, auf welchen – möglichst großen – Teilintervallen von $\mathbb{R}$ die Funktion f

(a) streng monoton steigt bzw. streng monoton fällt und
(b) streng konvex bzw. streng konkav ist.

Aufgabe 48 (4 Punkte) Beweisen Sie (z. B. mit Hilfe des Mittelwertsatzes oder einer der Folgerungen daraus) für $w > 0$ die Ungleichungen

$$\tanh(w) < w < \sinh(w).$$

Hierbei ist $\tanh(w) = \frac{\sinh(w)}{\cosh(w)}$ die hyperbolische Tangensfunktion. Leiten Sie als Anwendung mit Hilfe der Substitution $w = \ln(\sqrt{\frac{y}{x}})$ für $y > x > 0$ die Ungleichungen zwischen dem geometrischen, logarithmischen und arithmetischen Mittel her, das sind

$$\sqrt{xy} < \frac{y-x}{\ln(y) - \ln(x)} < \frac{y+x}{2}.$$

Aufgabe 49* (4+2 Zusatzpunkte) Berechnen Sie die Taylorreihe (mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$) der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \sin^2(x),$$

indem Sie

(a) alle Ableitungen $f^{(n)}(0)$ berechnen und in die Definition der Taylorreihe einsetzen;
(b) das Cauchy-Produkt von Reihen verwenden.

Zusatzfrage und Hinweise: Warum ist a priori klar, dass die Taylorreihe von f gegen f konvergiert? Durch Koeffizientenvergleich sollten Sie auf die Identität $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} = 2^{2n-1}$ stoßen. Es gibt noch eine Abkürzung; wenn Sie diese finden, gibt es dafür zwei zusätzliche Punkte.

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 23.01.2024, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Di., 30.01.2024 in den Übungen