Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

41	42	43	44	Σ

Übungen zur Analysis I
Blatt 11

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 41 (4 Punkte)

(a) In der Vorlesung wurde die Darstellung

$$\exp(z) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ bewiesen. Für $x \in \mathbb{R}$ erhält man hierfür einen einfacheren Beweis, wenn man von der Identität $1 = \ln'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\ln(1+h) - \ln(1))$ ausgeht, darin $h = \frac{x}{n}$ wählt und die Stetigkeit der Exponententialfunktion ausnutzt. Führen Sie die Einzelheiten aus.

(b) Zeigen Sie mit einem ähnlichen Argument wie in Teil (a), dass für $x > 0$ gilt

$$\ln(x) = \lim_{n\to\infty} n\big(x^{\frac{1}{n}} - 1\big).$$

Starten Sie dazu mit $1 = \exp(0) = \exp'(0)$.

(c) Verallgemeinern Sie weiter und beweisen Sie, dass

$$1 = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(n)}\big(n^{\frac{1}{n}} - 1\big).$$

(d) Folgern Sie aus Teil (c), dass die Folge $a_n = n(\sqrt[n]{n} - 1)$ divergiert und für jedes $\alpha \in (0,1)$ die Folge $b_n = n^{\alpha}(\sqrt[n]{n} - 1)$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 42 (4 Punkte) In Aufgabe 37 haben Sie ein neues Konvergenzkriterium für Reihen kennengelernt. In dieser Aufgabe soll die Anwendung eingeübt werden. Dazu definieren wir die Doppelfakultät einer Zahl $n \in \mathbb{N}_0$

$$n!! = \prod_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}(n-2k) = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 4\cdot 2, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ n(n-2)(n-4)\cdots 3\cdot 1, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(a) Prüfen Sie für $p \in \mathbb{N}$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$ auf Konvergenz. Wählen Sie dazu in dem Konvergenzkriterium von Aufgabe 37 die Folge $\xi_n = n$. Für welche $p \in \mathbb{N}$ kann keine Aussage getroffen werden?

(b) Wählen Sie nun eine andere Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um auch die übrigen Fälle $p \in \mathbb{N}$ behandeln zu können und ergründen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe für diese $p \in \mathbb{N}$.

Hinweis zu (b): Mit dem Cauchyschen Verdichtungssatz kann man einsehen, dass die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$ divergiert. Führen Sie die Details aus.

Aufgabe 43 (4 Punkte, Leibniz-Regel) Die Funktionen f und g seien n-mal differenzierbar. Durch vollständige Induktion nach n beweise man die Identität

$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Orientieren Sie sich dabei am Beweis des binomischen Lehrsatzes. Als Anwendung berechne man $f^{(1000)}(x)$ für $f(x) = x^2\sin(x)$.

Aufgabe 44 (4 Punkte) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung. Eine gesonderte Betrachtung des Nullpunkts ist hier erforderlich.

(b) Begründen Sie, dass die Ableitung f' in 0 unstetig ist.

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 16.01.2024, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Di., 23.01.2024 in den Übungen