Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

37	38	39	40	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I
BLATT 10

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 37 (4 Punkte) Das Quotientenkriterium ist nur ein Spezialfall einer ganzen Schar an Konvergenzkriterien für Reihen parametrisiert durch eine Folge. In dieser Aufgabe sollen Sie eine allgemeine Fassung erarbeiten.

Es sei also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen. Um die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nachzuweisen, wählt man nun eine Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver Zahlen. Aus der Folge der Summanden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und der Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruiert man eine weitere Folge $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$\rho_n = \xi_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - \xi_{n+1} \qquad \text{für } n \geq 1.$$

Zeigen Sie:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, falls $\liminf_{n\to\infty} \rho_n > 0$.

(b) Falls ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\rho_n \leq 0$ für alle $n \geq N$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_n}$ divergiert, so divergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Hinweis: Um in Aufgabenteil (a) die Konvergenz zu zeigen, wenden Sie das Majorantenkriterium an und vergleichen Sie mit einer Teleskopsumme. In Aufgabenteil (b) soll das Minorantenkriterium angewendet werden. Wie muss man bei der Anwendung die Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wählen um beim Quotientenkriterium auszukommen?

Aufgabe 38 (4 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:

(a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{z^2}{1+|z|}$

(b) $f : \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 10^{-10}\right\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{z}$

(c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \exp(-|z|)$

(d) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$

Aufgabe 39 (4 Punkte) Es sei $I = [a, b]$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.

(a) Es gelte $f(I) \subset I$. Zeigen Sie, dass es ein $x \in I$ gibt mit $f(x) = x$.

(b) Es gelte $I \subset f(I)$. Zeigen Sie, dass es ein $x \in I$ gibt mit $f(x) = x$.

Hinweis: Betrachten Sie für beide Aufgabenteile die Funktion $g(x) = f(x) - x$.

Aufgabe 40 (4 Punkte) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *periodisch* mit Periodenlänge $L > 0$, falls für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x + L) = f(x)$.

(a) Zeigen Sie, dass jede stetige periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

(b) Nun sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, periodisch mit $L = 2$, und es gelte $f(0) > f(1)$. Zeigen Sie, dass $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $g(x) = f(x^2)$, *nicht* gleichmäßig stetig ist.

Fragenkatalog In der vorlesungsfreien Zeit zwischen den Feiertagen möchten wir Ihnen die Gelegenheit geben, in Ihrem eigenen Tempo, zu überprüfen, ob Sie einen guten Überblick über die bisherigen Vorlesungsinhalte gewinnen konnten. Dazu soll dieser Fragenkatalog dienen.

Die folgenden Aussagen sind nach dem Schema „wahr oder falsch" zu beantworten – zu einer vollständigen Antwort gehört aber auch eine Begründung.

Ihre Antworten brauchen Sie *nicht* abgeben und sie werden auch nicht korrigiert! Tauschen Sie sich mit Ihren Kommilitonen über Ihre Antworten aus und vergleichen Sie.

(1) Jede Teilfolge einer Cauchy-Folge ist eine Cauchy-Folge.

(2) Jeden nach unten beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

(3) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$.

(4) Ist eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, so besitzt sie keinen Häufungspunkt.

(5) Jede streng monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist injektiv.

(6) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{k^2})$ ist konvergent.

(7) Eine Zahlenfolge kann höchstens abzählbar viele Häufungswerte besitzen.

(8) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, so ist auch jede Umordnung $(a_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty} a_{\sigma(n)} = a$.

(9) Die Menge aller beschränkten Zahlenfolgen mit Werten in $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

(10) Für nichtleere, beschränkte Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ und $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A,\, b \in B\}$ gilt
$$\sup(A \cdot B) \leq \sup(A) \cdot \sup(B).$$

(11) Eine Folge komplexer Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann eine Nullfolge, wenn
$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|a_k| \mid k \geq n\} = 0.$$

(12) Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß ist jede Teilfolge einer beschränkten Folge konvergent.

(13) Die Menge der Häufungswerte einer Folge reeller Zahlen besitzt ein größtes Element.

(14) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ebenfalls konvergent.

(15) Die imaginäre Einheit i ist definiert als die eindeutig bestimmte Lösung $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 + 1 = 0$.

(16) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit der Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} a_{n+k} - a_n = 0$ für jede natürliche Zahl k, so ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(17) Jede beschränkte Folge besitzt höchstens endlich viele Häufungspunkte.

(18) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(19) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bestimmt divergente Folge, so ist $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent.

(20) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bestimmt divergente Folge, so ist $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten, einen guten Übergang ins neue Jahr und eine erholsame vorlesungsfreie Zeit!

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 09.01.2024, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Di., 16.01.2024 in den Übungen