HEINRICH-HEINE-UNIVERSITÄT DÜSSELDORF
PROF. DR. AXEL GRÜNROCK
JOSEPH ADAMS M.SC.

| 33 | 34 | 35 | 36 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

# ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I
## BLATT 9

Name: ................................ Name: ................................ Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: ................................ MatrNr: ................................ ...................

**Aufgabe 33 (4 Punkte)** Finden Sie je ein Paar von Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, deren Cauchy-Produkt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}b_k$$

(a) konvergiert, aber nicht absolut konvergiert,
(b) absolut konvergiert, obwohl $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

**Aufgabe 34 (4 Punkte)** Was können Sie über den Konvergenzradius $R$ einer Potenzreihe $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ aussagen, wenn deren Koeffizientenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einer der folgenden Bedingungen genügt?

(a) Es existieren $C > 0$ und $N \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|a_n| \leq C(n+1)^N$,
(b) es existieren $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}_0$ und eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $|a_{n_k}| \geq \varepsilon n_k^{-N}$ besteht.

Formulieren Sie jeweils eine Behauptung und beweisen Sie diese! Was ergibt sich in dem Spezialfall, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt aber keine Nullfolge ist?

**Aufgabe 35 (4 Punkte)**

(a) Es sei $X \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $f : X \to \mathbb{C}$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Zeigen Sie, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ eine Cauchy-Folge ist, dass dann auch $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.
(b) Es sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x}$ und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_n = \frac{1}{n}$. Ist dann $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge? Was lässt sich nun mit (a) über die Funktion $f$ aussagen?

Hinweis: Wie auch bei Aufgabe 18 sollen Sie in Aufgabenteil (a) lediglich mit den Definitionen von Cauchy-Folge und gleichmäßiger Stetigkeit arbeiten.

**Aufgabe 36 (4 Punkte)** Der Cosinus hyperbolicus und der Sinus hyperbolicus sind definiert durch

$$\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z)),$$
$$\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)).$$

Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellungen dieser Funktionen und zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$,
(b) $\sinh(z+w) = \cosh(z)\sinh(w) + \sinh(z)\cosh(w)$,
(c) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.

**Abgabe:** in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 19.12.2023, 10.25 Uhr
**Besprechung:** ab Di., 09.01.2024 in den Übungen