Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

29	30	31	32	Σ

Übungen zur Analysis I
Blatt 8

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 29 (4 Punkte) Für zwei beschränkte Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wissen wir aus Aufgabe 22, dass gilt

$$\limsup_{n\to\infty} a_n + b_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Man finde für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Folge $(a_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$, sodass gilt

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n^{(m)} > \sum_{m=1}^{\infty} \limsup_{n\to\infty} a_n^{(m)},$$

und alle involvierten Reihen absolut konvergieren.

Aufgabe 30 (4 Punkte) Es sei $\ell^1(\mathbb{N}_0)$ der Vektorraum aller komplexen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, für die $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert. Für $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell^1(\mathbb{N}_0)$ und $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell^1(\mathbb{N}_0)$ sei die Faltung

$$a * b = ((a*b)_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \qquad \text{definiert durch} \qquad (a*b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Faltung $* : \ell^1(\mathbb{N}_0) \times \ell^1(\mathbb{N}_0) \to \ell^1(\mathbb{N}_0)$ assoziativ und kommutativ ist. Welcher Satz aus der Vorlesung ergibt, dass die Faltung tatsächlich von $\ell^1(\mathbb{N}_0) \times \ell^1(\mathbb{N}_0)$ nach $\ell^1(\mathbb{N}_0)$ abbildet?
(b) Beweisen Sie das Distributivgesetz $(a + b) * c = a * c + b * c$.
(c) Untersuchen Sie, ob in $\ell^1(\mathbb{N}_0)$ ein Einselement für $*$ existiert.

Wie würden Sie die algebraische Struktur von $(\ell^1(\mathbb{N}_0), +, *)$ bezeichnen?

Aufgabe 31 (4 Punkte) Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^n,$$

wobei die f_n die Fibonacci-Zahlen sind (vgl. Aufgabe 25). Leiten Sie dazu eine Rekursion für $x_n := \frac{f_n}{f_{n+1}}$ her und verwenden Sie Aufgabe 15 sowie die Eulersche Formel für den Konvergenzradius. Zeigen Sie ferner, dass für $|z| < R$ die Identität

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

gilt.

Aufgabe 32 (4 Punkte) Untersuchen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen. Diskutieren Sie auch das Konvergenzverhalten dieser Reihen auf dem Rand ihres Konvergenzkreises.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{2[\frac{n}{2}]} z^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 4^{n!} z^{n!}$

Hinweis: Beachten Sie, dass es sich bei (b) um eine sogenannte Lückenreihe handelt, bei der unendliche viele $a_n = 0$ sind. Hierbei ist die Anwendung der Eulerschen Formel für den Konvergenzradius nicht ohne weiteres anwendbar; auch bei der Formel von Cauchy-Hadamard ist Vorsicht geboten.

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 12.12.2023, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Di., 19.12.2023 in den Übungen