Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

25	26	27	28	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I
BLATT 7

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 25 (4 Punkte) Die Folge $(f_n)_n$ der Fibonacci-Zahlen ist durch

$$f_0 = 0, \qquad f_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad \text{für } n \geq 1$$

rekursiv definiert.

(a) Indem Sie die Partialsummen $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f_k f_{k+2}}$ als Teleskopsummen $\sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k+1}$ mit geeigneten a_k darstellen, berechnen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_n f_{n+2}}.$$

(b) In ähnlicher Weise berechne man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 4}.$$

Aufgabe 26 (4 Punkte)

(a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen, für die $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. Können Sie selbiges auch ohne die Voraussetzung der Monotonie zeigen?

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für $a_n = \left(n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^{-1}$ divergiert. Gilt hier $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$?

Hinweis: Verwenden Sie bei (b) den Cauchyschen Verdichtungssatz.

Aufgabe 27 (4 Punkte) Betrachten Sie für zwei gegebene Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die folgenden beiden Reihen

$$\text{(A)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{und} \qquad \text{(B)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Ist (A) konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge, so ist auch (B) konvergent.
(b) Ist (A) konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so konvergiert auch die Reihe (B).
(c) Ist (A) konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, so ist auch (B) konvergent.
(d) Ist (A) absolut konvergent und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so konvergiert auch (B) absolut.

Aufgabe 28 (6 Punkte) Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für die nachstehenden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz. Benennen Sie jeweils Konvergenzkriterien für Reihen, die Sie verwenden.

(a) $a_n = \binom{n}{3} \frac{(2+3i)^n}{2^{2n}}$

(b) $a_n = \frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}}$

(c) $a_n = (-1)^n \frac{2n - 4[\frac{n}{2}] + 2}{n}$

(d) $a_n = \frac{i^{(n^2)}}{n}$

(e) $a_n = \frac{(4+5i)^n}{n^2\, 6^n}$

(f) $a_n = \frac{(1+i\sqrt{3})^n}{2^n \sqrt[n]{n!}}$

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 05.12.2023, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Di., 12.12.2023 in den Übungen