Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

21	22	23	24	Σ

Übungen zur Analysis I
Blatt 6

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 21 (4 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und begründen Sie Ihre Ergebnisse:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{n}}, \qquad p \in \mathbb{N}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}, \qquad a \in \mathbb{R}^+$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p}, \qquad p \in \mathbb{N}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}, \qquad a, b \in \mathbb{R}^+$

Hinweis: Verwenden Sie für (d) den Sandwich-Satz.

Aufgabe 22 (4 Punkte) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen reeller Zahlen. Zeigen Sie:

(a) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$,

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$.

Geben Sie *ein* Folgenpaar an, für das in (a) $<$ und in (b) $>$ gilt. Leiten Sie ferner entsprechende Ungleichungen für $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ her.

Aufgabe 23 (4 Punkte) Wir definieren die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_n = \sqrt{n + 1000} - \sqrt{n}, \qquad b_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, \qquad c_n = \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n}.$$

Zeigen Sie, dass für $1 \leq n < 1000000$ gilt $a_n > b_n > c_n$, aber

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = \infty.$$

Hinweis: Verwenden Sie die dritte binomische Formel und bei der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Sandwich-Satz.

Aufgabe 24 (4 Punkte) Es seien $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$ fest gewählt. Wir definieren die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}) \qquad \text{für } n \geq 1.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für jede Wahl der Startwerte a_0 und a_1 konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Hinweis: Betrachten Sie die Differenzen $\Delta_n = a_{n+1} - a_n$. Für die Berechnung des Grenzwerts ist die geometrische Reihe hilfreich.

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 28.11.2023, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Di., 05.12.2023 in den Übungen