Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

17	18	19	20	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I
BLATT 5

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 17 (4 Punkte) Für eine Folge komplexer Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definieren wir die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n).$$

(a) Zeigen Sie wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ konvergiert, dass dann auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die selbe Zahl konvergiert.

(b) Finden Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die *nicht* konvergiert, sodass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trotzdem konvergiert. Begründen Sie Ihre Wahl.

Aufgabe 18 (1+3 Punkte) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

(a) Begründen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

(b) Zeigen Sie, dass auch $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Hinweis: In dieser Aufgabe dürfen Sie nicht darauf zurückgreifen, dass Cauchy-Folgen (in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) konvergent sind. Arbeiten Sie lediglich mit der Definition von Cauchy-Folge .

Aufgabe 19 (4 Punkte) Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge nichtnegativer reeller Zahlen, $S = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $a_n = \max\{x_k \mid 1 \leq k \leq n\}$. Zeigen Sie:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = S$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^n\right)^{\frac{1}{n}} = S$.

Hinweis: Verwenden Sie für Teil (b) den Sandwich-Satz.

Aufgabe 20 (4 Punkte) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$. Zeigen Sie, dass auch

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = a.$$

Hinweis: Begründen Sie zunächst, dass Sie ohne Einschränkung der Allgemeinheit $a = 1$ annehmen können. Zeigen Sie anschließend unter dieser Annahme, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$1 - \varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq 1 + \varepsilon.$$

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 21.11.2023, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Di., 28.11.2023 in den Übungen