Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

13	14	15	16	Σ

Übungen zur Analysis I
Blatt 4

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 13 (4 Punkte) Finden Sie für jede der folgenden Ungleichungen alle $x \in \mathbb{R}$, die diese erfüllen. Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $|x-2|+2 \leq |2x+2|$

(b) $x^2 - 2|x| + 1 > 0$

(c) $\dfrac{|x-2|}{|x-3|} \leq 2$

(d) $x - \sqrt{3x+7} \leq 1$

Aufgabe 14 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass $n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 6$ gilt.

(b) Zeigen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geq \frac{n+2}{n+1}.$$

(c) Verwenden Sie (b), um zu zeigen, dass die durch

$$e_n^* = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

gegebene Folge monoton fällt, und schließen Sie daraus $e_n^* \leq 3$ für alle $n \geq 5$.

(d) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $n! \geq \left(\frac{n}{3}\right)^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Verwenden Sie bei Aufgabenteilen (a) und (b) die Bernoulli-Ungleichung. Bei Aufgabenteil (c) dürfen Sie $2^6 \cdot 3^5 = 15\,552$ und $5^6 = 15\,625$ verwenden.

Aufgabe 15 (4 Punkte) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert indem Sie nachweisen, dass es sich um eine Cauchy-Folge handelt und bestimmen Sie ihren Grenzwert. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton (fallend oder wachsend)?

Hinweis: Zum Nachweis, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, können Sie Satz 2 in Abschnitt 2.4 der Vorlesung und die anschließende Bemerkung benutzen.

Aufgabe 16 (4 Punkte) Welche der folgenden Folgen bzgl. $n \in \mathbb{N}$ konvergieren? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Vergessen Sie nicht Ihre Antworten zu begründen.

(a) $\dfrac{(n^2+3n)^2 - n^4}{2n^3}$

(b) $\dfrac{n^2 3^n - 4^n}{(2^n+n)(2^n-n)}$

(c) $\dfrac{\binom{n}{3}2^n}{\binom{n}{2}3^n}$

(d) $\dfrac{6-n^4}{n(n^2-3)}$

(e) $\dfrac{n^3-2n+5}{n} - \dfrac{n^3+n^2+5}{n+1}$

(f) $\dfrac{x^n-n}{x^n+n}$ für ein festes $x > 0$

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 14.11.2023, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Di., 21.11.2023 in den Übungen