Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

9	10	11	12	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I
BLATT 3

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 9 (4 Punkte) Für $n, p \in \mathbb{N}$ definieren wir $s_n(p) = \sum_{k=1}^n k^p$. Zeigen Sie durch Induktion über n und mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes die Pascal'sche Identität

$$\sum_{p=0}^{q} \binom{q+1}{p} s_n(p) = (n+1)^{q+1} - 1.$$

Aufgabe 10 (4 Punkte) Sei K ein angeordneter Körper und $x, y \in K$ mit $0 < x \leq y$. Zeigen Sie, dass

$$x^2 \leq \left(\frac{2xy}{x+y}\right)^2 \leq xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2} \leq y^2,$$

wobei alle diese Ungleichungen strikt sind, es sei denn $x = y$.

Hinweis: Bei dieser Aufgabe ist man verleitet Wurzeln zu ziehen um mit den Quadraten fertig zu werden. In einem allgemeinen angeordneten Körper hat man allerdings keine Wurzel zur Verfügung.

Aufgabe 11 (2+2 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Menge beschränkt ist:

$$\left\{ \frac{n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

(b) Zeigen Sie die folgende Variante der Bernoulli-Ungleichung: Für $0 \leq x \leq 1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx}.$$

Aufgabe 12 (4 Punkte) Für zwei Teilmengen $A, B \subset K$ eines Körpers definiert man die sogenannte Minkowski-Summe $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$. Beweisen Sie für nichtleere, beschränkte Mengen $A, B \subset \mathbb{R}$ die Identitäten

(a) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$,

(b) $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 07.11.2023, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Di., 14.11.2023 in den Übungen