Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Axel Grünrock
Joseph Adams M.Sc.

1	2	3	4	Σ

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I
BLATT 1

Name: .... Name: .... Rückgabe in Gruppe:

MatrNr: .... MatrNr: ....

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Sei $A \subset Y$ beliebig. Zeigen Sie $f(f^{-1}(A)) \subset A$.

(b) Finden Sie

  (i) eine Abbildung $f : X \to Y$ und eine Teilmenge $A \subset Y$ mit $f(f^{-1}(A)) = A$,

  (ii) eine Abbildung $f : X \to Y$ und eine Teilmenge $A \subset Y$ mit $f(f^{-1}(A)) \subsetneq A$.

Aufgabe 2 (4 Punkte, de Morgan) Es sei $\mathcal{M}$ ein Mengensystem auf einer Menge X. Beweisen Sie:

(a) $$\left(\bigcup_{M\in\mathcal{M}} M\right)^c = \bigcap_{M\in\mathcal{M}} M^c,$$

(b) $$\left(\bigcap_{M\in\mathcal{M}} M\right)^c = \bigcup_{M\in\mathcal{M}} M^c.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Gegeben seien Mengen X und Y mit Teilmengen $M \subset X$ und $N \subset Y$. Das kartesische Produkt $M \times N$ fassen wir als Teilmenge der Grundmenge $X \times Y$ auf. Zeigen Sie, dass im allgemeinen

$$(M \times N)^c \neq M^c \times N^c.$$

Finden Sie eine korrekte Darstellung von $(M \times N)^c$ als Vereinigung von kartesischen Produkten von M, N sowie ihren Komplementen, und beweisen Sie diese.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Zeigen Sie die folgenden Aussagen über die Urbilder von Vereinigungen und Durchschnitten. Hierbei sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{N}$ ein Mengensystem auf Y.

(a) $$f^{-1}\Big(\bigcup_{N\in\mathcal{N}} N\Big) = \bigcup_{N\in\mathcal{N}} f^{-1}(N),$$

(b) $$f^{-1}\Big(\bigcap_{N\in\mathcal{N}} N\Big) = \bigcap_{N\in\mathcal{N}} f^{-1}(N).$$

Abgabe: in den entsprechenden Briefkasten bis Di., 24.10.2023, 10.25 Uhr
Besprechung: ab Di., 31.10.2023 in den Übungen